

Intuitionnisme

Joseph Vidal-Rosset
Université de Nancy 2

27 novembre 2006

On distinguera dans cet article la logique intuitionniste de l'intuitionnisme philosophique. La première peut se définir par un ensemble restreint de règles qui gouvernent la théorie intuitionniste de la démonstration, le second relève de la subordination systématique de la vérité à l'examen des preuves de celle-ci. Historiquement, celui-ci étant antérieur à celle-la, certains philosophes que l'on peut considérer comme intuitionnistes n'ont pas pu distinguer la logique classique de la logique intuitionniste et n'ont donc pas envisagé les mathématiques du point de vue de la logique intuitionniste. On ira du simple au complexe, en partant des éléments de la logique intuitionniste pour élargir cet aperçu à l'intuitionnisme entendu comme une classe de systèmes philosophiques.

1 Logique intuitionniste

L'intuitionnisme logique appartient aux mathématiques constructives qui s'opposent aux mathématiques classiques en remplaçant le "il existe tel objet" par "nous pouvons construire tel objet". Du point de vue intuitionniste, une formule logique ou mathématique est valide si et seulement si une preuve de celle-ci existe. Le système BHK (Brouwer-Heyting-Kolmogorov) donne une interprétation constructive de la logique en lisant les connecteurs et les quantificateurs de la façon suivante :

1. \vee (*ou*) : pour prouver $(p \vee q)$ on doit avoir une preuve de p ou une preuve de q
2. \wedge (*et*) : pour prouver $(p \wedge q)$ on doit avoir une preuve de p et une preuve de q

3. \Rightarrow (*implique*) : une preuve de $(p \Rightarrow q)$ est un algorithme qui convertit une preuve de p en une preuve de q
4. \neg (*non*) : pour prouver $\neg p$ on doit montrer que p implique une contradiction
5. \exists (*il existe*) : pour prouver $(\exists x)Fx$, on doit construire un objet a et prouver que Fa
6. \forall (*pour tout*) : une preuve de $(\forall x)Fx$ est un algorithme qui, appliqué à n'importe quel objet x du domaine sur lequel porte la quantification universelle, prouve que Fx .

Le système BHK offre une interprétation constructive et indépendante pour chaque opérateur logique et permet également de comprendre le rejet de la loi classique du tiers exclu caractérise la logique intuitionniste. On l'explique en montrant que la formule

$$\neg(\exists x)Fx \vee (\exists x)Fx \tag{1}$$

universellement valide du point de vue classique ne l'est plus dans le cadre intuitionniste où l'on interprète la disjonction $(p \vee \neg p)$ par "nous avons une preuve de p ou nous avons une preuve de *non* p ". Il suffit de supposer que le domaine d'interprétation de la formule (1) soit infini dénombrable pour que notre progression ne nous fasse peut-être jamais rencontrer un x ayant la propriété F , dès lors cette progression infinie montre qu'il est intuitivement impossible de considérer (1) comme valide.¹

Le rejet de la loi classique du tiers exclu a des conséquences importantes sur la théorie de la démonstration. La plus connue de ces conséquences est que la méthode de réduction à l'absurde prouve alors seulement les énoncés négatifs, car si $(p \Rightarrow \neg\neg p)$ est une formule toujours valide, la double négation pouvant toujours être introduite, ce n'est en revanche pas le cas de $(\neg\neg p \Rightarrow p)$: la double négation ne peut jamais être supprimée. D'autre part, si (1) n'est plus un théorème, alors affirmer la fausseté d'un énoncé universel ne conduit pas l'intuitionniste à un

¹Brouwer a donné des contre-exemples "faibles" et des contre-exemples "forts" de la loi classique du tiers exclu. La conjecture de Goldbach, selon laquelle tout nombre pair égal ou supérieur à 4 est la somme de deux nombres premiers, est un contre-exemple faible, puisqu'elle reste un problème ouvert, mais n'ayant de preuve ni d'elle, ni de sa négation, nous n'avons pas de raison, d'accepter la disjonction, "la conjecture de Goldbach est vraie ou fausse", lorsque cette disjonction est interprétée du point de vue intuitionniste. Dans un article de 1928 intitulé "Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus", Brouwer donne un contre-exemple fort du tiers exclu, en montrant que, si l'ensemble des réels est construit de manière intuitionniste, alors un énoncé comme "Quel que soit un nombre réel x , x est rationnel ou x n'est pas rationnel", conduit à une contradiction.

énoncé existentiel qui serait le contre-exemple de l'énoncé universel en question, car ni

$$\neg(\forall x)\neg Fx \Rightarrow (\exists x)Fx \quad (2)$$

ni

$$\neg\forall x Fx \rightarrow \exists x\neg Fx \quad (3)$$

ne sont alors des formules valides puisqu'elle sont équivalentes à (1).

Enfin si l'on conçoit aisément que l'intuitionnisme peut apparaître comme une position fructueuse dans le domaine de la programmation logique, où l'on justifie les réponses par le calcul sans jamais se satisfaire uniquement de déclarations d'existence, on comprend tout aussi bien que l'intuitionnisme puisse être conduit à sacrifier des raisonnements et des résultats des mathématiques non constructives, lorsque ceux-ci transcendent le domaine du démontrable. Se priver de l'infini actuel, comme l'exige la position intuitionniste authentique qui n'admet que l'infini potentiel, complique évidemment la tâche du mathématicien intuitionniste. Seules des raisons philosophiques expliquent pourquoi une position aussi difficile peut être prise en mathématiques.

2 Philosophie intuitionniste

Brouwer (1881-1966) fut le fondateur de la logique intuitionniste et ce sont ses conceptions philosophiques sur la nature des mathématiques qui ont guidé son travail de mathématicien. Il considérait les mathématiques comme dépendantes du sens interne qu'est le temps. Il s'écartait ainsi à la fois de la vision platonicienne de l'univers mathématique comme Monde Intelligible, et de la philosophie formaliste qui réduit les mathématiques à un langage formel. (voir [Brouwer, 1981]).

Mais développer la philosophie de Brouwer pour elle-même ne nous dirait pas clairement ce qui définit essentiellement la position intuitionniste en philosophie. Sur ce point, la définition qu'en donne Vuillemin (1920-2001) dans [Vuillemin, 1981], [Vuillemin, 1984], ou encore [Vuillemin, 1994], constitue une extension intéressante puisque cette définition permet de ne pas se limiter à la logique intuitionniste mais de voir que l'intuitionnisme est une position philosophique qui peut se comprendre indépendamment d'une révision des lois de la logique classique. Selon Jules Vuillemin, on peut appeler "intuitionniste" un système philosophique qui, par les définitions qu'il donne de la vérité, du bien et du beau, les rend dépendants de la méthode par laquelle la connaissance, la

conscience morale et le jugement de goût les atteignent. A la différence d'un système réaliste (ou, dans la terminologie de Vuillemin, "dogmatique"), le vrai est toujours dans un système intuitionniste, "épistémologiquement contraint", c'est-à-dire fonction de la preuve ou de la vérification.

Les philosophies que Vuillemin appelle "dogmatiques" (celle d'un Platon, d'un Aristote, ou encore d'un Spinoza), accordent peu d'attention à l'activité de la raison dans la découverte de la vérité. L'analyse de cette activité est au contraire fondamentale du point de vue intuitionniste. Cependant l'intuitionnisme n'est pas une forme de subjectivisme ou de relativisme, et encore moins une expression du scepticisme : l'intuitionnisme ne renonce pas à l'idée de vérité et, de son point de vue, les moyens de preuve offrent un accès effectif à la réalité extra-subjective et ils sont universels en raison de leur rationalité. C'est en ce sens que les philosophies de la connaissance d'Epicure, de Descartes, sont intuitionnistes : elles ont pour ambition de mettre à jour les conditions de possibilité de toute connaissance claire et distincte, et de la vérité en général. De la même façon que la logique intuitionniste renonce aux raisonnements mathématiques transcendants, la philosophie intuitionniste (entendue en son sens large), jette un éclairage sur les illusions de la métaphysique dogmatique. Les analyses contemporaines d'un Michael Dummett ne contredisent en rien cette définition large de l'intuitionnisme. Si ce n'est que Dummett considère la logique intuitionniste comme outil de l'argumentation philosophique, position qu'aucun philosophe avant Brouwer n'aurait pu exprimer (voir [Dummett, 1991]).

Références

- [Brouwer, 1981] Brouwer, L. (1981). *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [Dummett, 1991] Dummett, M. (1991). *Philosophie de la logique*. Minuit, Paris.
- [Vuillemin, 1981] Vuillemin, J. (1981). Trois philosophes intuitionnistes : Epicure, descartes, kant. *Dialectica*, 35 :21–41.
- [Vuillemin, 1984] Vuillemin, J. (1984). *Nécessité ou Contingence, l'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*. Minuit.
- [Vuillemin, 1994] Vuillemin, J. (1994). *L'intuitionnisme kantien*. Vrin, Paris.