PREUVES INTUITIONNISTES TOUCHANT LA PREMIÈRE PHILOSOPHIE

Joseph Vidal-Rosset

A tous les cartésiens

Résumé. **—** Vuillemin a toujours lu Descartes comme un intuitionniste avant la lettre, si l'on entend par « intuitionniste » un mathématicien qui adopte la philosophie de Brouwer et la logique de Heyting. On se propose dans l'Introduction et la première section de cet article de montrer que cette lecture que Vuillemin fait de Descartes est parfaitement justifiée en expliquant pourquoi les *Méditations* peuvent être lues comme une application de la logique intuitionniste. La seconde et la troisième section sont respectivement consacrées à l'analyse logique de la preuve du *Cogito* (Méditation seconde) et de la première preuve de l'existence de Dieu (Méditation troisième). On montre que les deux preuves fondamentales des *Méditations métaphysiques* de Descartes sont toutes les deux valides en logique intuitionniste. Du point de vue logique, la première preuve de l'existence de Dieu que donne Descartes pourrait être considérée comme un progrès par rapport à la preuve d'Anselme qui est concluante en logique classique mais qui échoue en logique intuitionniste. Cependant on nuance ce jugement en conclusion en insistant sur le fait que le concept de Dieu sur lequel Descartes fonde sa preuve est indiscutablement un élément réaliste et non constructif.

Introduction
De l'intérêt de l'analyse intuitionniste des preuves des *Méditations*

Le projet philosophique de Descartes déclaré dès la première phrase de la première Méditation est d'« établir quelque chose de ferme et de constant dans les sciences », et pour cela, de commencer « tout de nouveau, dès les fondements », en *démontrant*, à partir de la méthode du doute, des vérités absolument certaines pour toute conscience. C'est parce qu'il n'y a pas de théorie de la démonstration sans étude de la logique qu'il est crucial d'analyser la logique des preuves des *Méditations* pour pouvoir les comprendre. Certes, la syllogistique était perçue par Descartes comme une discipline formelle mais vide de contenu intuitif. Il est vrai que

Cet article est très différent de l'exposé que j'ai donné à la conférence de Montréal en septembre 2011. Le projet d'écrire ce texte est né après une discussion engagée par mes étudiants qui assistaient aux conférences données par François Lepage à l'Université de Lorraine en février 2012. Merci à mes étudiants et à François Lepage. Je remercie enfin à travers cet article, tous les logiciens et informaticiens, auteurs d'outils précieux pour la vérification des théorèmes, mis à la disposition de tous, sous forme de logiciels libres.

le fondement rationnel de nos connaissances *sur le monde* n'est pas à chercher, pour Descartes, du côté de la logique, de laquelle il y a selon lui finalement peu à apprendre, mais du côté des mathématiques, c'est-à-dire de l'arithmétique et de la géométrie. Cependant, pour écarter immédiatement tout malentendu, il faut rappeler que, du point de vue intuitionniste, la logique est une *partie* des mathématiques et que, dès lors qu'elle est corrigée des défauts de la logique classique, elle ne doit être écartée ni des mathématiques, ni de l'entreprise du fondement des sciences. La logique intuitionniste, contrairement à la logique classique est fondée sur une représentation de la progression de la connaissance dans le temps, et c'est cet aspect fondamental qui la rend particulièrement adaptée pour la compréhension des *Méditations* en raison de l'analogie suivante : de la même façon que la méthode du doute permet de comprendre ce qui est métaphyiquement nécessaire, la logique intuitionniste donne aussi les règles générales des preuves mathématiques qui sont recevables d'un point de vue intuitionniste. Cette logique forme donc le « noyau dur » de l'intuitionnisme et occupe une place comparable à celle que Descartes donne aux *Méditations* dans son système. En effet, les *Méditations métaphysiques* fondent à leur tour la science mathématique elle-même sur la preuve du *Cogito* qui conduit par une chaîne de raisons aux preuves de l'existence de Dieu, ce dernier étant le garant de la vérité des idées claires et distinctes que toute conscience peut reconnaître dans les éléments de l'arithmétique et de la géométrie.

J'ai déjà souligné ailleurs [**19**] que Vuillemin entend par « intuitionnisme » tout système de philosophie de la connaissance qui, comme celui de Kant après celui de Descartes, place le Sujet au centre de la constitution de sa description intégrale et systématique de la réalité ; autrement dit, Vuillemin ne restreint pas le sens de ce terme à la philosophie des mathématique qui est née au début du vingtième siècle avec Brouwer. Scrupuleusement attentif à l'histoire de la philosophie, Vuillemin [**24, 25**] a remarqué que la philosophie de Descartes s'est constituée comme celle d'Epicure en privilégiant « les jugements de méthode » ; le doute cartésien étant le type même d'un jugement de méthode, c'est-à-dire un performatif théorique systématiquement employé pour décider du vrai. En considérant Descartes comme un intuitionniste, Vuillemin évidemment invite à comparer la philosophie de Descartes et celle de Brouwer, et il est vrai qu'elles ne sont pas sans points communs.

L'œuvre révolutionnaire de Brouwer en mathématiques est fondée sur l'idée selon laquelle les mathématiques relèvent d'une libre activité de l'esprit indépendante d'un quelconque langage particulier. Dès 1908, Brouwer manifeste une méfiance à l'égard de la logique formelle classique qui s'exprime par ces mots [**4**, pp. 18-19] :

> [...] les raisonnements logiques effectués indépendamment de la perception, attendu qu'ils sont les signes de transformations mathématiques à l'intérieur du système mathématique qui régit les perceptions, peuvent déduire, de prémisses scientifiquement admises, des conclusions inacceptables.

Dans ce même article, Brouwer remarque au passage que « la sagesse qui se manifeste dans l'œuvre de Spinoza est ressentie comme totalement indépendante de sa systématisation logique », avant de souligner que les paradoxes logico-mathématiques contemporains sont nés d'un privilège indûment accordé à la logique sur une mathématique vidée à tort de l'intuition originaire du temps. Il poursuit et achève son analyse du rôle de la logique en mathématiques en affirmant que, si le principe du syllogisme et celui de contradiction sont universellement fiables, le principe du tiers exclu en revanche ne l'est plus pour les systèmes infinis.

On sait aujourd'hui comment Heyting et Kolmogorov ont réussi à exprimer une logique, dite « intuitionniste » qui est capable de répondre aux exigences de Brouwer, et comment les modèles et contre-modèles de Kripke donnent une interprétation formelle claire à cette logique. Je me propose dans cet article de montrer que, du point de vue de l'argumentation philosophique, les trois premières Méditations de Descartes illustrent avec force exactement la même position. En 1960, Vuillemin [22] avait déjà montré que la *Géométrie* de Descartes repose sur une décision métaphysique qui « insère l'œuvre cartésienne dans la tradition des mathématiques intuitionnistes sinon finitistes ». Mais probablement parce qu'il a toujours été convaincu du bien fondé et de la solidité de la logique classique et qu'il n'a jamais prêté une grande attention au développement technique de la logique intuitionniste, Vuillemin, à ma connaissance, ne semble s'être jamais vraiment posé la question de savoir si la recherche des preuves qui est à l'œuvre dans les *Méditations* s'accorde avec les principes fondamentaux de la philosophie de Brouwer et avec la logique intuitionniste en général. Je vais montrer qu'il en est bien ainsi.

1. Première Méditation
Des choses que l'on ne peut logiquement révoquer

Je développe dans cette section quelques éléments qui justifient encore un peu plus le rapprochement que l'on peut faire entre la philosophie de Descartes et l'intuitionnisme contemporain et je montre pourquoi l'on est fondé à penser, à la lecture de la Première Médidation, que la logique des démonstrations dans les *Méditations* est la logique intuitionniste.

L'entreprise philosophique de Descartes, tout comme celle de Brouwer, repose avant tout sur cette conviction inébranlable : la connaissance rationnelle ne peut être fondée de manière ferme et constante que sur des idées simples, claires et distinctes pour tout sujet pensant. On aurait tort de négliger l'originalité d'une telle position, car elle ne va pas de soi pour nombre de philosophes qui n'accordent aucun privilège au sujet pensant en tant qu'être singulier isolé de l'activité sociale et collective. Pour un Quine comme pour bien d'autres, les vrais doutes sont définis par les problèmes que posent les sciences ; en conséquence de quoi le point de départ de Descartes a, pour tout philosophe « dogmatique » au sens que Vuillemin donne à ce terme, quelque chose d'artificiel et de faussé. Le rejet spinoziste de la méthode du doute cartésien, exprimé par exemple dans la proposition **XLIII** de la seconde partie de l'*Ethique* [16] - « Qui a une idée vraie sait en même temps qu'il a une idée vraie et ne peut douter de la vérité de sa connaissance » - met en relief l'originalité de la position cartésienne. Pour Descartes, le fait que je sois capable de parvenir jusqu'au doute métaphysique et hyperbolique, en forgeant la fiction selon laquelle je pourrais être trompé par une puissance infiniment trompeuse, même lorsque je fais l'addition de deux et de trois, atteste de la liberté de la volonté qui est présente dans tout jugement, selon la théorie de la troisième Méditation. Comme le dit très justement Alquié [1, p. 177] :

> la marche de la Méditation première relève avant l'heure de la structure ontologique du « je pense » : du sensible, on doute par raison, car l'entendement dépasse et fonde le sensible ; du rationnel, on doute par volonté, car la volonté est infinie, dépasse l'entendement, et constitue le fond le plus authentique de nous-mêmes.

Dans sa note introductive à l'article cité de Brouwer [4, p. 16], Largeault écrit que « l'origine de l'intuitionnisme brouwerien est une métaphysique où le vouloir est antérieur à la pensée ». Je laisse aux exégètes de la pensée de Brouwer le soin de vérifier jusqu'à quel point cette remarque de Largeault sur Brouwer est correcte. Mais cette citation de Largeault pourrait aussi caractériser correctement la position de Descartes, à la condition d'être modifiée ainsi : « l'origine de l'intuitionnisme *cartésien* est une métaphysique où la *liberté du vouloir est la condition de possibilité de la méthode du doute* ». [1]

Cependant, si le doute est de toute évidence un acte de la volonté, il n'est pas moins évident qu'il faut, dans le contexte cartésien, en concevoir l'usage comme une méthode pour la recherche de la vérité, et non comme le font les sceptiques, comme une fin en soi. Ce point mériterait à peine d'être mentionné si, dans la célèbre et prestigieuse revue *Analysis*, dans un article publié en 1979 [17], on ne pouvait pas au sujet de Descartes, lire ce genre de perles :

> In one of the most celebrated philosophical passages, the first of his six *Meditations*, Descartes claims to have demonstrated a sceptical conclusion concerning the senses by arguing that the very sensations which seems to confirm the existence of an "external" world might be occasioned by a dream.

Il est regrettable que, dans cet article, l'auteur prenne la première Méditation de Descartes comme simple prétexte et commette un grossier contresens, par manque de fidélité à *l'ordre des raisons* sur lequel Gueroult [7, 8] a insisté à juste titre. Il est vrai que Descartes reprend ici à son compte le doute sceptique au sujet des sens, mais il est inexact d'écrire qu'il prétend que ce doute *démontre* les conclusions sceptiques. L'expression de « Cartesian scepticism » utilisée plus loin dans le même article, est incompatible avec ce texte de la sixième Méditation :

> [...] pouvant user de ma mémoire pour lier et joindre les connaissances présentes aux passées, et de mon entendement qui a déjà découvert toutes les causes de mes erreurs, je ne dois plus craindre désormais qu'il se rencontre de la fausseté dans les choses qui me sont le plus ordinairement représentées par mes sens. Et je dois rejeter tous les doutes de ces jours passés, comme hyperboliques et ridicules, particulièrement cette incertitude si générale touchant le sommeil, que je ne pouvais distinguer de la veille : car à présent j'y rencontre une très notable différence, en ce que notre mémoire ne peut jamais lier et joindre nos songes les uns aux autres et avec toute la suite de notre vie, ainsi qu'elle a de coutume de joindre les choses qui nous arrivent étant éveillés.

Cette citation de la sixième Méditation montre que dans la première Méditation, Descartes *simule* un doute sceptique qui le conduit à reconnaître qu'il ne dispose pas *pour le moment* d'une quelconque preuve de la fiabilité des sens. C'est la raison pour laquelle *les raisons naturelles de douter* ne touchent pas les vérités de l'arithmétique et de la géométrie. En effet, les preuves de ces vérités peuvent être faites par un entendement qui ne s'inquiète pas de la correspondance de ses idées avec les objets du monde extérieur :

1. Il est tout à fait remarquable que la négation ne peut pas être comprise adéquatement de manière intuitionniste si l'on n'admet pas pour la décrire *un élément pré-logique*, qui exprime en réalité l'action, et non la représentation. Mais j'abandonne ici le développement de cette remarque pour rester dans les limites de mon sujet.

> Car, soit que je veille ou que je dorme, deux et trois joints ensemble formeront toujours le nombre de cinq, et le carré n'aura jamais plus de quatre côtés ; et il ne semble pas possible que des vérités si apparentes puissent être soupçonnées d'aucune fausseté ou d'incertitude.

Ce moment de la première Méditation établit que, si le doute *naturel* permet de remettre en cause la correspondance des représentations et des choses existantes représentées, en revanche, comme le souligne avec précision Gueroult [7, p. 36], il ne touche pas les idées simples et universelles qui sont les conditions nécessaires de toute représentation possible :

> De ce genre de choses est la nature corporelle en général, et son étendue ; ensemble la figure des choses étendues, leur quantité ou grandeur, et leur nombre ; comme aussi le lieu où elles sont, le temps qui mesure leur durée, et autres semblables.

Ce n'est que lorsque Descartes a épuisé les *raisons naturelles de douter*, qu'il évoque pour finir la possibilité d'un doute *métaphysique*. Le raisonnement de Descartes est le suivant : j'ai en moi l'*opinion* qu'il y a un Dieu dont la puissance est infinie et, bien que l'idée de ce Dieu soit celle d'un Dieu bon incompatible avec l'idée de tromperie volontaire, il n'est pas naturellement douteux que je me trompe parfois, sans que je puisse pour autant affirmer qu'un tel Dieu *veuille* me tromper. On pourrait, poursuit Descartes, être tenté de se ranger du côté des athées plutôt que d'admettre une telle puissance infinie (même si l'idée de tromperie est incompatible avec l'idée de Dieu). Mais alors au sujet des athées s'impose la conclusion suivante :

> Toutefois, de quelque façon qu'ils supposent que je sois parvenu à l'état et à l'être que je possède, soit qu'ils l'attribuent à quelque destin ou fatalité, soit qu'ils le réfèrent au hasard, soit qu'ils veuillent que ce soit par une continuelle suite et liaison des choses, il est certain que, puisque faillir et se tromper est une espèce d'imperfection, d'autant moins puissant sera l'auteur qu'ils attribueront à mon origine, d'autant plus sera-t-il probable que je suis tellement imparfait que je me trompe toujours.

La première Méditation s'achève par la mise en place de la méthode du doute hyperbolique qui consiste à rejeter comme fausse toute idée qui *peut* être douteuse ; autrement dit la méthode réduit le connaissable à l'indubitable. Or, par un raisonnement qui mériterait très certainement d'être analysé de manière plus approfondie [2], Descartes affirme que l'imperfection de ma connaissance a une probabilité d'autant plus grande que l'on suppose une imperfection de la cause de mon être. En conséquence l'athée a encore plus de raisons de douter et ne peut ni échapper au *doute naturel* du sceptique, ni même échapper à l'hypothèse sceptique d'une absence de véracité des idées claires et distinctes, car, comme Descartes le souligne dans les *Sixièmes Réponses aux Objections* (cité par Gueroult [7, p. 46]) :

2. C'est encore une remarque qu'il sera ici impossible de développer. François Lepage a attiré mon attention sur le fait que la logique intuitionniste peut être mathématiquement définie comme le cadre logique de la théorie des probabilités. Le fait que Descartes conçoive dans la sixième Méditations toutes les vérités qui enveloppent l'existence des corps comme des vérités avec un degré de certitude nécessairement inférieur aux vérités de la métaphysique qui fonde les sciences, confirme l'idée que la bonne logique pour Descartes est cette logique intuitionniste qui ne sera définie que bien plus tard dans l'histoire.

> d'autant moins puissant [l'athée] concevra l'auteur de son être, d'autant plus aura-t-il occasion de douter, si sa nature n'est point tellement imparfaite qu'il se trompe, même dans les choses qui lui semblent très évidentes.

A l'issue de la première Méditation, la méthode est donc fixée : il s'agit de partir d'une idée *métaphysiquement indubitable* pour parvenir à un fondement de la science contemporaine qui soit tout aussi indubitable que cette idée. Cette méthode en réalité ne diffère pas de l'interprétation que l'on donne aujourd'hui de la logique intuitionniste, comme je vais maintenant le montrer.

Traduire formellement la démarche démonstrative des *Méditations* dans la logique intuitionniste n'a d'intérêt que si et seulement si cette traduction ou bien éclaire les *Méditations*, ou bien si les *Méditations* donne une interprétation intuitive claire de la signification des preuves en logique intuitionniste. Ce dernier point peut être assez facilement mettre en évidence en se fondant par exemple sur le formalisme des preuves intuitionniste adopté par Bell *et alii* [**3**, pp. 192-223].

Remarquons qu'à l'instar des intuitionnistes contemporains, Descartes ne considère une idée comme absolument vraie qu'à la condition que celle-ci soit indubitable ou prouvée. Or du point de vue de la logique intuitionniste, le fait d'être douteux, ou *incertain*, pour une idée ne constitue pas une nouvelle valeur de vérité qui s'ajouterait à celles du vrai et du faux (notées respectivement aujourd'hui $\top$ et $\bot$). Le doute est un *acte* qui dans le cadre cartésien dépend de la volonté et, dans le contexte intuitionniste contemporain est le fait de remarquer que, pour tel énoncé A, on ne possède pas de preuve concluante de la vérité de A. Pour traduire le fait qu'un énoncé A « n'est pas connu comme vrai (*is not known to be true*) » c'est-à-dire, plus simplement et en meilleur français, est *douteux ou incertain*, Bell *et alii* [**3**] le notent par l'apposition d'un point d'interrogation devant la formule A qui fera l'objet du test de validité intuitionniste. L'application des règles intuitionnistes pour la méthode des arbres de Beth dans le style de Bell *et al.* [**3**], permet de donner une traduction simple de la signification de la méthode de preuve indirecte qui rappelle la même méthode dans le cadre de la logique classique : soit $?(A)$, si le développement arborescent complet de toutes les sous formules de $?(A)$ donnent uniquement des branches qui se ferment sur une contradiction c'est-à-dire sur l'absurde, alors l'incertitude de la validité de A est elle-même absurde et donc A est effectivement prouvable du point de vue intuitionniste, ce qui peut s'écrire ainsi :

$$\vdash_i A \quad \leftrightarrow_{def.} \quad (\alpha \nVdash A) \rightarrow \bot \tag{1}$$

ou, dans la notation de Bell *et al.* :

$$\vdash_i A \quad \leftrightarrow_{def.} \quad (?A) \rightarrow \bot \tag{2}$$

De même en logique intuitionniste, si une formule A n'est pas prouvable, alors il existe un contre modèle de A qui peut être représenté par un arbre de Beth de $?(A)$ où il existe au moins une branche ouverte, et ce contre-modèle correspond à un contre-modèle de Kripke. On a donc :

$$\nvdash_i A \quad \leftrightarrow_{def.} \quad \alpha \nVdash A \tag{3}$$

ou encore

$$\nvdash_i A \quad \leftrightarrow_{def.} \quad (?A) \nrightarrow \bot \tag{4}$$

Il est remarquable que la recherche des preuves dans les *Méditations* corresponde exactement à la façon dont la recherche de preuve est conçu en logique intuitionniste. On a vu plus haut que l'impuissance à prouver la fiabilité des sens ne devait être conçue ni comme une preuve en faveur du scepticisme, ni comme une réfutation de celui-ci. Autrement dit la formule

$$\nvdash_i A \tag{5}$$

ne doit pas être considéré comme équivalente à

$$\vdash_i \neg A \tag{6}$$

car (5) exprime le fait d'échouer à prouver A, mais n'exclut pas le fait que A puisse être prouvé ou réfuté ultérieurement, autrement dit (5) n'implique pas (6). En revanche (6) exprime la réfutabilité intuitionniste de A, ce qui est une propriété persistante dans le temps, donc (6) implique (5).

Si l'on prête attention à la manière dont Descartes conçoit les preuves dans les *Méditations*, on constate que le fameux *ordre des raisons* correspond à un ordre dans le temps, chacune des six *Méditations* correspondant à une journée d'étude, la seconde commençant précisément par ces mots : « La Méditation que je fis hier m'a rempli l'esprit de tant de doutes, qu'il n'est plus désormais en mon pouvoir de les oublier ». Nombreux sont les lecteurs qui, peu attentifs à l'ordre adopté, n'ont pas compris qu'une thèse n'est assumée par Descartes qu'au moment où il en donne la preuve, mais pas avant. Tel est le cas par exemple de la distinction réelle de l'âme et du corps, qui ne peut pas être assumée avant la troisième Méditation, c'est-à-dire pas avant la démonstration de l'existence d'un Dieu qui soit le garant de la vérité des idées claires et distinctes. Cela signifie que, du point de vue démonstratif adopté par les *Méditations*, la thèse matérialiste selon laquelle l'âme et le corps sont une seule et même chose, reste une thèse douteuse, ni réfutée ni prouvée, jusqu'à ce que la démonstration de sa fausseté soit faite à la sixième Méditation. Cette importance accordé à l'ordre temporel des démonstrations a trouvé son expression contemporaine dans les modèles de Kripke qui offrent actuellement le modèle le plus simple pour interpréter la logique intuitionniste.

On peut conclure cette section sur un doute légitime et répondre à ce doute. Si la logique dont Descartes fait usage dans les *Méditations* est vraiment la logique intuitionniste, il est légitime de se demander s'il existe dans ce texte un traitement intuitionniste du théorème du tiers exclu. La réponse à cette question est affirmative ; ce texte existe, il se trouve au premier alinéa de la seconde Méditation, où Descartes établit la transition avec ce qui tout ce qui précède. Je souligne dans la citation qui suit ce qui est crucial pour justifier la thèse selon laquelle Descartes fait usage du tiers exclu *via* une interprétation intuitionniste :

> La Méditation que je fis hier m'a rempli l'esprit de tant de doutes, qu'il n'est plus désormais en ma puissance de les oublier. Et cependant je ne vois pas de quelle façon je les pourrai résoudre ; et comme si tout à coup j'étais tombé dans une eau très profonde, je suis tellement surpris, que je ne puis ni assurer mes pieds dans le fond, ni nager pour me soutenir au-dessus. Je m'efforcerai néanmoins, et suivrai derechef la même voie où j'étais entré hier, en m'éloignant de tout ce en quoi je pourrai imaginer le moindre doute, tout de même que si je connaissais que cela fût absolument faux ; et *je continuerai* ***toujours***

> *dans ce chemin, jusqu'à ce que j'aie rencontré quelque chose de certain, ou du moins, si je ne puis autre chose, jusqu'à ce que j'aie appris certainement, qu'il n'y a rien au monde de certain.*

Remarquons que Descartes fait usage d'une formule qui est effectivement celle du tiers exclu, mais qu'il lui donne précisément une interprétation intuitionniste : dans la recherche indéfinie d'une idée certaine, c'est-à-dire prouvable, le doute hyperbolique sera désactivé pour au moins une idée dont la démonstration est indubitable, ou bien avec la démonstration qu'il n'existe aucune idée certaine. La formalisation de la disjonction énoncée par Descartes est bien une instance de la formule du tiers exclu, où x est une variable qui prend ses valeurs dans le domaine des idées du *Cogito* et où Px signifie « x est prouvable » :

$$\exists x Px \vee \forall x \neg Px \tag{7}$$

Si l'on fait usage de la logique classique, il est démontrable que (7) est une tautologie, comme on le montre ici avec la méthode des arbres de Beth pour la logique classique :

Théorème 1.1. —

$$\vdash_c \exists x Px \vee \forall x \neg Px$$

Démonstration. —

$$\begin{array}{c}
1.\ \neg(\exists x Px \vee \forall x \neg Px)\ \checkmark \\
2.\ \neg\exists x Px\ {\scriptstyle (1)} \\
3.\ \neg\forall x \neg Px\ {\scriptstyle (1)}\ \checkmark \\
4.\ \neg\neg Pa\ {\scriptstyle (3)} \\
5.\ \neg Pa\ {\scriptstyle (2)} \\
\times
\end{array}$$

□

Dans le cadre classique, la disjonction formulée par Descartes serait une platitude. Mais l'interprétation intuitionniste de (7) ne fait pas de cette formule une formule prouvable en logique intuitionniste. Ce que veut dire Descartes peut être clairement représenté par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \vdots & \\
 & \textit{Dubito} & \\
\exists x Px & & \forall x \neg Px \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

On peut démontrer que (7) n'est pas prouvable du point de vue intuitionniste en utilisant la méthode des arbres exposée par Bell *et alii* [3] et reprise dans l'Introduction de ce volume :

Théorème 1.2. —

$$\nvdash_i \exists x Px \vee \forall x \neg Px$$

Démonstration. —

$$
\begin{array}{c}
1.\ ?(\exists x P x \vee \forall x \neg P x)\ \checkmark \\
2.\ ?\exists x P x\ _{(1)} \\
3.\ ?\forall x \neg P x\ _{(1)}\ \checkmark \\
4.\ ?P a\ _{(2)} \\
\hline
5.\ ?\neg P b\ _{(3)}\ \checkmark \\
\hline
\\
6.\ P b\ _{(5)}
\end{array}
$$

□

Si l'on doute de cette démonstration, on peut vérifier son résultat à l'aide d'Imogen, un programme écrit par Sean McLaughlin [13] pour tester automatiquement le caractère prouvable des formules en logique intuitionniste du premier ordre [3]. Un des avantages d'Imogen est une syntaxe standard et assez intuitive : les symboles

`forall , exists , ~ , & , | , => , <=>`

dénotent respectivement la quantification universelle, la quantification existentielle, la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence. Imogen adopte aussi la convention du langage Prolog où les variables sont symbolisées par les majuscules (ou par un mot commençant par une majuscule) et en utilisant les lettres minuscules (ou les mots commençant par des lettres minuscules) pour symboliser les prédicats. On verra plus loin que cette souplesse inspirée de Prolog permet l'écriture de formules qui restent très intuitives et donc très faciles à lire. Voici la copie du résultat du test de (7) avec Imogen (la barre verticale « | » symbolisant le connecteur « ou ») :

```
joseph@joseph-Inspiron-530:~$ imogen prove 'exists X.p(X) | forall X. ~ p(X)'
### Warning: using slow symbols ###
% SZS status CounterSatisfiable

The database is saturated.  The formula is false!
```

Enfin, pour donner un sens intuitif à ce résultat, on peut remarquer que cette instance de la formule du tiers exclu correspond exactement à un certain type de contre-exemples au tiers exclu donnés par Brouwer et qualifiés de « faibles » (par opposition aux contre-exemples dits « forts » donnés plus tardivement aussi par Brouwer et qui, comme l'explique van Atten[18], sont ceux qui produisent directement une contradiction lorsqu'on substitue dans les formules les concepts intuitionnistes à leurs expressions classiques). Un des contre-exemples faibles au tiers exclu donné par Brouwer est l'énoncé suivant :

> « Il y a un chiffre qui apparaît plus souvent que tous les autres dans le développement décimal de π, ou tous les chiffres du développement décimal de π sont tels qu'il est faux que l'un d'entre eux apparaît plus souvent que les autres »

Il est évident que la formalisation de cet énoncé en calcul des prédicats donne aussi la formule (7). Le contre-modèle qui prouve le théorème 1.2 illustre, de manière schématique mais précise, le refus intuitionniste d'assumer la transcendance implicitement contenue dans le tiers exclu classique. Comme le montre le contre-modèle, il est évidemment incontestable qu'au moment où l'énoncé quelconque Pa est prouvé, le doute au sujet de la vérité de cette

3. http://www.seanmcl.com/software/imogen/

instance du tiers exclu devient absurde. Mais, ce que souligne Brouwer dans [4], est précisément le fait que le tiers exclu perd son statut de vérité logique dans les systèmes *infinis*, en donnant évidemment à ce mot le sens intuitionniste d'*infini potentiel*.

On comprend donc que, de la même façon qu'il est possible de chercher indéfiniment une preuve de l'existence d'un chiffre qui apparaît plus souvent que les autres dans le développement décimal de π, il est envisagé comme possible par Descartes que le *Cogito* puisse effectivement « se noyer » en s'enfonçant *toujours plus loin* dans une recherche qui ne lui assure ni l'existence d'une seule idée certaine, ni la preuve qu'il n'y a rien de certain. Autrement dit n'exclut pas de rencontrer une situation qui corresponde au second monde décrit plus haut par le contre-modèle et qui se prolongerait indéfiniment :

$$\cfrac{\begin{array}{c} ?(\exists x Px \vee \forall x \neg Px) \checkmark \\ ?\exists x Px \\ ?\forall x \neg Px \checkmark \\ ?Pa \end{array}}{\begin{array}{c} ?\neg Pb \checkmark \\ \vdots \end{array}}$$

Résumons le rôle que peut jouer la logique intuitionniste comme théorie de la démonstration dans les *Méditations*. Pour établir la certitude absolue de n'importe quelle idée A, doutons de A, si l'opération qui consiste à douter de A, rend ce doute absurde, c'est-à-dire si $?(A)$ conduit à une contradiction, alors A est une idée indubitable c'est-à-dire une vérité certaine ; dans le cas contraire on considérera que A n'est pas prouvé. Les règles logiques utilisées seront celles de la logique intuitionniste, car, comme on vient de le voir, la formule (7) est prouvable avec les règles de la logique classique, alors qu'elle ne l'est pas avec celle de la logique intuitionniste. On voit donc qu'en utilisant une logique plus faible, on doit pouvoir obtenir une certitude plus forte. La méthode logique étant définie, on peut maintenant montrer pourquoi la preuve intuitionniste du *Cogito* n'a rien de trivial.

2. Méditation Seconde
De la nature intuitionniste de la preuve du *Cogito*

Une idée qui résiste au doute hyperbolique, c'est-à-dire à la fiction du mauvais génie, en impliquant l'absurde dès lors qu'elle fait l'objet de ce doute est une idée indubitable ou encore un idée vraie ou démontrable. La formule (1), caractéristique de la logique intuitionniste, schématise la recherche de preuves dans les *Méditations*. On ne perdra pas de temps à faire la recension des philosophes qui ont affirmé que le *Cogito* est une vérité triviale. Un des derniers à l'avoir fait plus ou moins ouvertement est Hintikka [9, 11], qui n'a fait qu'aggraver l'erreur de Gassendi en s'appuyant sur la logique libre de Lambert pour contester l'intérêt que Descartes donne de la preuve du *Cogito* de Descartes. Le raisonnement d'Hintikka [9, pp. 147-149] consiste simplement à remarquer que le fameux *Cogito, ergo sum* de Descartes a la forme logique suivante :

$$\mathit{Cogito}(\text{ego}) \to \exists x(x = \text{ego}) \tag{8}$$

Hintikka remarque alors que, si l'on raisonnait dans une « logique libre », c'est-à-dire, selon la définition que Lambert [12, p. 35] donne de la logique libre « une logique libre d'assomptions existentielles sur les termes généraux et singuliers », la question de savoir si l'on peut inférer « J'existe » de « Je pense » serait alors une question vraiment pertinente. Mais tel n'est pas le cas puisque tout énoncé de la forme

$$B(a) \to \exists x(x = a) \tag{9}$$

repose sur une présupposition existentielle véhiculée par l'usage de la constante a. En conséquence de quoi Hintikka semble considérer que la remarque que Gassendi avait faire à Descartes dans les *Cinquièmes Objections* selon laquelle la conclusion du « J'existe » aurait pu être tirée du fait que je me promène comme de n'importe quelle autre de mes actions, puisque

$$\mathit{Ambuli}(\text{ego}) \to \exists x(x = \text{ego}) \tag{10}$$

partage avec (8) la même forme logique, à savoir (9).

Or l'analyse d'Hintikka sur ce point, du moins dans la section de cet article, néglige à la fois la signification et la preuve que Descartes apporte pour établir la vérité du *Cogito*. La suite de l'article s'oriente vers une explication du *Cogito* comme étant une sorte de performatif théorique, ce qui explique pour Hintikka [**9, 11**, p. 167] le privilège que Descartes accorde au verbe *cogitare*. Néanmoins, la critique développée dans la section 4 de l'article subsiste : la présupposition existentielle d'un énoncé comme (8) n'est pas contestable et rend la preuve de Descartes, aux yeux d'Hintikka, sans intérêt logique.

Pariente est très probablement au fait de la critique d'Hintikka et on peut supposer qu'il songe à son insuffisance lorsqu'il écrit [**15, 14**, p. 39] :

> ce qui est suffisant pour la logique ne l'est pas pour Descartes, en ce point de son argumentation. Plus exactement peut-être, Descartes impose ici une condition qui renforce l'exigence de la logique, en ceci qu'il reconnaît comme vrai que l'indubitablement vrai.

Ici « indubitablement vrai » signifie sans doute « effectivement démontrable ». La réduction du vrai au domaine du démontrable est l'exigence de la logique intuitionniste dont le premier principe théorique est le refus d'assumer l'universalité du principe de bivalence. Il est donc évidemment impropre de parler comme le fait ici Pariente de « *la* logique », comme si l'on pouvait faire abstraction de la différence sémantique fondamentale entre logique classique et logique intuitionniste.

Ce point établi, je crois cependant que, dès lors que l'on raisonne à l'aide la logique intuitionniste, il est possible de démontrer qu'Hintikka comme Pariente accordent tous deux une importance exagérée à la nécessité d'expliquer l'usage de la première personne dans les *Méditations*. Le problème de Descartes n'est pas de prouver l'existence de l'*ego*, mais de trouver une pensée indubitable, c'est-à-dire une pensée qui résiste à la puissance du grand trompeur. En effet, aussi surprenant que cela puisse paraître, il n'y a aucune difficulté à traduire la démonstration de Descartes à la troisième personne, sans rien lui faire perdre de son caractère apodictique. On remarquera que dans la démonstration qui suite, la référence à la première personne du singulier n'est pas requise, mais que l'on peut faire usage de cette première personne pour rendre plus intuitif le résultat.

Supposons donc qu'un sujet décide de considérer toutes ses représentations comme douteuses, et forge pour cela la fiction d'un être qui la puissance de le tromper quel que soit le contenu et la nature de ses pensées. Un tel sujet peut-il malgré tout être certain d'au moins une pensée ? La réponse de Descartes à cette question est qu'un tel sujet peut être absolument certain qu'il pense, non seulement parce qu'il est impossible de douter que l'on pense au moment où l'on doute, puisque le doute est une pensée, mais parce que l'acte de tromperie du mauvais génie à l'égard du sujet doutant implique aussi que ce sujet est trompé seulement si ce sujet pense, en vertu de la signification qui est donnée dans ce contexte à cette fiction du mauvais génie. En effet la tromperie est supposée s'exercer sur *les représentations* ou sur les pensées du sujet, non sur des actes dont la description contient une référence au corps, ce que semble n'avoir pas compris Gassendi.

Le fait que la tromperie du grand trompeur ait pour condition nécessaire la pensée et que la supposition d'une tromperie et la négation de la pensée rend la tromperie impossible, peut se traduire ainsi :

> « Quel que soit x et quel que soit y, le fait que x trompe y seulement si y pense, implique qu'il est certainement faux que x trompe y si l'on suppose à la fois que x trompe y et que y ne pense pas. »

L'énoncé qui précède est facilement traductible dans le langage du calcul des prédicats, et la syntaxe d'Imogen en offre une traduction presque limpide :

```
forall X.  forall Y.((trompe(X,Y)=> pense(Y))=>
((trompe(X,Y) & ~ pense(Y))=> ~ trompe(X,Y)))
```

Vérifier qu'un tel énoncé est prouvable en logique intuitionniste devient dès lors un jeu d'enfant. Voici la copie du résultat du test de cette formule *via* Imogen :

```
joseph@joseph-Inspiron-530:~$ imogen prove
'forall X.  forall Y.((trompe(X,Y)=> pense(Y))=>
((trompe(X,Y) & ~ pense(Y))=> ~ trompe(X,Y)))'
### Warning: using slow symbols ###
% SZS status Theorem for forall X. forall Y.((trompe(X,Y)=>
 pense(Y))=>((trompe(X,Y) & ~ pense(Y))=> ~ trompe(X,Y)))

The formula is true!
```

On peut aussi traduire la formule dans le langage usuel du calcul des prédicats du premier ordre et en donner la preuve à l'aide de la méthode exposée dans l'Appendice A de cet article :

Théorème 2.1. —

$$\vdash_i \forall x \forall y((Txy \to Py) \to ((Txy \land \neg Py) \to \neg Txy))$$

Démonstration. —

1. $?\forall x \forall y((Txy \to Py) \to ((Txy \land \neg Py) \to \neg Txy))$
2. $?\forall y((Tay \to Py) \to ((Tay \land \neg Py) \to \neg Tay))$ $_{(1)}$
3. $?((Tab \to Pb) \to ((Tab \land \neg Pb) \to \neg Tab))$ $_{(2)}$ ✔
4. $Tab \to Pb$ $_{(3)}$ ✔
5. $?((Tab \land \neg Pb) \to \neg Tab)$ $_{(3)}$ ✔
6. $\boldsymbol{Tab}$ $_{(5)}$
7. $\neg Pb$ $_{(5)}$
8. $?\neg Tab$ $_{(5)}$
9. $\boldsymbol{?Pb}$ $_{(7)}$

10. $\boldsymbol{?Tab}$ $_{(4)}$ × | 11. $\boldsymbol{Pb}$ $_{(4)}$ ×

□

On imagine aisément la réaction que peut provoquer la démonstration qui précède. Au « grand appareil » qu'est la fiction du grand trompeur, il semble que l'on substitue ici l'appareil de la formalisation logique avec ses subtilités pour lesquelles Descartes, comme le rappelle Guenancia [6, pp. 32-34], n'avait que mépris. Mais je crois qu'un tel rejet traduirait plus l'ignorance et l'incompréhension de la signification d'une telle preuve que les scrupules de l'historien. Ce que montre une telle preuve est au contraire précieux dans la perspective intuitionniste qui, incontestablement, est bien celle de Descartes. En effet, cette preuve démontre qu'il suffit d'accorder, d'une part, que « penser » est une condition nécessaire pour « être trompé » (ce qui est évidemment impliqué par la fiction du grand trompeur) et, d'autre part, que les constantes logiques de la conjonction, de l'implication et de l'absurde, ont une signification naturelle, universelle et évidente, pour que la premier résultat positif des *Méditations* soit, du point de vue intuitionniste, une *vérité logique* irréfutable. Il faut rappeler que le logicien intuitionniste est, en théorie de la démonstration, plus exigeant que le logicien classique car, comme je l'ai expliqué dans un autre article [20], toutes les vérités de la logique intuitionnistes sont des vérités analytiques (raison pour laquelle le tiers exclu n'est pas une vérité de la logique intuitionniste). Tel est bien le cas de la vérité du « Je pense » dans les *Méditations*. On se souvient que Gueroult [7, p. 62] a insisté sur le fait que la certitude *métaphysique* du *Cogito* est entendue par Descartes comme une certitude *scientifique*. La démonstration en logique intuitionniste du raisonnement de Descartes confirme ce point, en prouvant formellement ce qui peut se comprendre intuitivement : aucun état de la connaissance concevable n'est compatible avec l'hypothèse d'un individu qui se trompe, ou qui est trompé, mais qui ne pense pas.

Comme le souligne avec justesse Guenancia [5, p. 65], « il est impossible de douter de sa propre existence, de *chose qui pense* ». C'est donc bien la pensée et, avec la pensée en général, tout contenu de pensée au moment même de la représentation, qui est mis à l'abri du doute hyperbolique dans la seconde Méditation. Quelle que soit l'obscurité et la confusion d'une idée, le grand trompeur ne peut faire en sorte que je n'ai pas cette représentation au moment où je la pense. Il se peut que je ne me représente rien de réel, mais, de la même façon qu'il est impossible que je ne pense pas lorsque je doute, il est impossible que cette représentation ne soit rien, c'est-à-dire n'existe pas, quand je pense.

Mais on recherche désormais une idée qui puisse correspondre certainement à une chose existant hors du *Cogito*. Il est temps d'aborder ce qui est à mon avis la plus grande difficulté des *Méditations*, celle de la preuve qui permet au *Cogito* de prouver que l'idée de Dieu qui est en lui à la fois *prouve l'existence* d'un être qui est hors de lui, et exprime correctement l'essence de Dieu. C'est l'objet de la troisième Méditation.

3. Méditation troisième
Validité intuitionniste de la première preuve de l'existence de Dieu

La première preuve de l'existence de Dieu que Descartes donne dans les *Méditations* est dite « par les effets » parce qu'elle procède de l'idée que le *Cogito* a de Dieu pour prouver l'existence de Dieu qui est cause de cette idée. Dans la troisième Méditation, Descartes n'expose pas de manière abrupte cette preuve mais, de la même façon que pour la preuve qu'il donne du *Cogito*, s'efforce de préparer son lecteur à la compréhension de cette preuve. On ne fera pas ici l'analyse conceptuelle de cette preuve qui a longuement été développée par Gueroult [7, ch. V, pp. 154-247]. On s'efforcera au contraire d'en donner la traduction la plus concise et la plus précise possible afin de savoir, conformément à l'objectif poursuivi dans cet article, si cette preuve est exprimable et recevable en logique intuitionniste du premier ordre. La preuve de Descartes, indépendamment du travail conceptuel de préparation qui la précède, tient dans l'alinéa suivant :

> Partant il ne reste que la seule idée de Dieu, dans laquelle il faut considérer s'il y a quelque chose qui n'ait pu venir de moi-même. Par le nom de Dieu j'entends une substance infinie, éternelle, immuable, indépendante, toute connaissante, toute-puissante, et par laquelle moi- même, et toutes les autres choses qui sont (s'il est vrai qu'il y en ait qui existent) ont été créées et produites. Or ces avantages sont si grands et si éminents, que plus attentivement je les considère, et moins je me persuade que l'idée que j'en ai puisse tirer son origine de moi seul. Et par conséquent il faut nécessairement conclure de tout ce que j'ai dit auparavant, que Dieu existe. Car, encore que l'idée de la substance soit en moi, de cela même que je suis une substance, je n'aurais pas néanmoins l'idée d'une substance infinie, moi qui suis un être fini, si elle n'avait été mise en moi par quelque substance qui fût véritablement infinie.

Les six prémisses de cette preuve se répartissent en deux groupes de même taille. Le premier est constitué de trois axiomes (propositions 3.1 à 3.3) qui expriment les rapports évidents pour la pensée entre réalité des idées et causes des idées. Le second groupe est constitué de trois propositions (3.4 à 3.6) qui expriment des *faits* dont le *Cogito* ne peut douter. Toute les propositions qui suivent jouent un rôle dans la preuve. Pour plus de clarté, elles sont aussitôt traduites par exprimées par une formule de la logique du premier ordre écrites dans la syntaxe d'Imogen. Il faut aussi préciser que la preuve qui suit fait usage de deux constantes d'individus qui n'appartiennent pas à la même catégorie grammaticale. En effet le terme *deo*, écrit en minuscules, fait référence au *concept* de Dieu, c'est-à-dire à l'idée innée que le sujet pensant conçoit. Ce sujet pensant est désigné par le terme de *cogito* écrit aussi en minuscules, pour se plier à la syntaxe d'Imogen. Pour que le sens de la preuve soit clair, il faut donc garder à l'esprit que *deo* désigne un *objet de pensée*, quand *cogito* désigne la représentation du *sujet pensant*. Ces précisions étant faites, on peut maintenant exprimer, formaliser et tester la preuve de Descartes.

Proposition 3.1. — *Si un être pensant a un concept quelconque, alors il existe quelque chose qui est la cause de ce concept* [(4)].

```
(forall Y.(a_un_concept(cogito,Y)=> exists X. cause(X,Y)))
```

Proposition 3.2. — *Une chose ne peut être la cause d'une autre qu'à la condition que la cause ait au moins autant de perfections (ou de réalité) que l'effet* [(5)].

4. La réalité objective d'une idée doit venir du *Cogito* ou d'une autre chose existante, car sinon cette réalité aurait pour cause le néant, ce qui est impossible.

5. Descartes écrit :

> c'est une chose manifeste par la lumière naturelle, qu'il doit y avoir pour le moins autant de réalité dans la cause efficiente et totale que dans son effet : car d'où est-ce que l'effet peut tirer sa réalité sinon de sa cause ?

```
(forall X. forall Y.(cause(X,Y)=> a_au_moins_autant_de_perfections_que(X,Y)))
```

Proposition 3.3. — *Un être ne peut être la cause de ce qui est actuellement infini qu'à la condition d'être aussi actuellement infini.*

```
(forall X. forall Y.((cause(X,Y) & actuellement_infini(Y))=>
actuellement_infini(X)))
```

Proposition 3.4. — *Le Cogito a un concept de Dieu.*

```
(a_un_concept(cogito,deo))
```

Proposition 3.5. — *L'infini actuel est une propriété du concept de Dieu.*

```
(actuellement_infini(deo))
```

Proposition 3.6. — *Il est absurde d'affirmer qu'il y a au moins autant de perfections dans le Cogito que dans le concept de Dieu*[(6)]*.*

```
(~ a_au_moins_autant_de_perfections_que(cogito,deo))
```

La conclusion de la première preuve « par les effets » de l'existence de Dieu est la suivante :

Proposition 3.7. — *Ce n'est pas le Cogito qui est la cause du concept de Dieu, mais un être qui est actuellement infini.*

```
(~cause(cogito,deo) & exists X.(actuellement_infini(X) & cause(X,deo)))
```

On parvient maintenant au théorème de cette section :

Théorème 3.8. — *La conjonction de chacune des expressions qui formalisent les propositions 3.1 à 3.6 implique, en logique intuitioniste du premier ordre, l'expression qui formalise la proposition 3.7 ; autrement dit :*

$$\vdash_i ((3.1) \wedge (3.2) \wedge (3.3) \wedge (3.4) \wedge (3.5) \wedge (3.6)) \rightarrow (3.7) \qquad (11)$$

Du seul point de vue de la logique intuitionniste, la preuve « par les effets » que Descartes donne de l'existence de Dieu est donc irréprochable.

Test avec Imogen. — `joseph@joseph-Inspiron-530:~$`

```
imogen prove '((forall Y.(a_un_concept(cogito,Y)=>
> exists X. cause(X,Y))) &
> (forall X. forall Y.(cause(X,Y)=>
> a_au_moins_autant_de_perfections_que(X,Y))) &
> (forall X. forall Y.((cause(X,Y) & actuellement_infini(Y))=>
> actuellement_infini(X))) &
> (a_un_concept(cogito,deo)) &
```

On remarque que « perfection » est synonyme de « réalité » et que Descartes n'applique une relation d'ordre sur les représentations qu'en raison des relations de dépendances logiques ou grammaticales : la substance pouvant être conçue ou connue sans ses modes, elle est d'une perfection supérieure aux modes ; la représentation de Dieu qui est la représentation d'une substance actuellement infinie a plus de perfection que n'importe quelle autre représentation, et donc la cause de la représentation de Dieu doit avoir au moins autant de perfection, ou réalité, que cette représentation en contient. En conséquence aucune substance finie ne peut être la cause de la représentation de Dieu, ce qui exclut que le *Cogito* soit la cause de cette représentation.

6. Puisque le sujet pensant doute, il est nécessairement imparfait et donc fini ; le concept de Dieu enveloppe en revanche une infinité de perfections.

```
> (actuellement_infini(deo)) &
> (~ a_au_moins_autant_de_perfections_que(cogito,deo)))=>
> (~cause(cogito,deo) & exists X.(actuellement_infini(X) & cause(X,deo)))'
### Warning: using slow symbols ###
% SZS status Theorem for ((forall Y.(a_un_concept(cogito,Y)=>
exists X. cause(X,Y))) &
(forall X. forall Y.(cause(X,Y)=>
a_au_moins_autant_de_perfections_que(X,Y))) &
(forall X. forall Y.((cause(X,Y) & actuellement_infini(Y))=>
actuellement_infini(X))) &
(a_un_concept(cogito,deo)) &
(actuellement_infini(deo)) &
(~ a_au_moins_autant_de_perfections_que(cogito,deo)))=>
(~cause(cogito,deo) & exists X.(actuellement_infini(X) & cause(X,deo)))

The formula is true!
```

□

Test avec ileanCoP. — ileanCoP est, comme Imogen, un vérificateur automatique de théorèmes pour la logique intuitionniste du premier ordre [7], écrit en Prolog par Jens Otten. La syntaxe de ce progrmme est très proche de celle d'Imogen. Voici la copie du résultat sans surprise du test de (11) avec ileanCoP :

```
?- %  nnf_mm_intu compiled 0.00 sec, 10,932 bytes
% /home/joseph/provers/prolog-provers/ileancop_swi/ileancop_swi.pl
compiled 0.00 sec, 18,216 bytes
true.

?- prove(((all Y:(a_un_concept(cogito,Y)=>
ex X: cause(X,Y))) ,
(all X: all Y:(cause(X,Y)=>
a_au_moins_autant_de_perfections_que(X,Y))) ,
(all X: all Y:((cause(X,Y) , actuellement_infini(Y))=>
actuellement_infini(X))) ,
(a_un_concept(cogito,deo)) ,
(actuellement_infini(deo)) ,
(~ a_au_moins_autant_de_perfections_que(cogito,deo)))=>
(~ cause(cogito,deo) , ex X:(actuellement_infini(X) , cause(X,deo)))).
|    |    |    |    |    |    |    |    |    0.009999999999999998
true
```

□

De la même façon qu'une calculette donne le résultat d'une longue opération arithmétique, Imogen et ileanCoP permettent de savoir si une formule de la logique du premier ordre est ou n'est pas prouvable en logique intuitionniste. Aux esprits chagrins qui seraient tentés de répondre que la copie de ces résultats ne remplacent pas une démonstration, on donne la

7. http://www.leancop.de/ileancop/

possibilité de faire cette démonstration avec la méthode donnée dans l'Appendice A de cet article.

Pour aider encore un peu ceux qui souhaitent faire la démonstration de (11), en voici la traduction dans un formalisme très usuel :

$$\begin{aligned}((\forall y(Rcy \to \exists x Cxy))\land\\ (\forall x \forall y(Cxy \to Axy))\land\\ (\forall x \forall y((Cxy \land Iy) \to Ix))\land\\ Rcd\land\\ Id\land\\ \neg Acd) \to\\ (\neg Ccd \land \exists x(Ix \land Cxd))\end{aligned} \tag{9}$$

Le code LaTeX de cette formule est le suivant :

```
((\forall y(Rcy\to \exists x Cxy))\land(\forall x \forall y (Cxy \to Axy))
\land (\forall x \forall y((Cxy \land Iy)\to Ix)) \land
Rcd \land Id \land \neg Acd)\to (\neg Ccd \land \exists x(Ix \land Cxd))
```

Il suffit de copier ces trois lignes de code qui précèdent et de les soumettre au Tree Proof Generator, écrit et mis en ligne [8] par Wolfgang Schwarz, pour obtenir la preuve de cette formule *en logique classique*. Le logiciel de Wolfgang Schwarz donne un arbre de 15 branches à la 381ème étape de son calcul qui démontre la validité de (11). L'accord des résultats obtenus par Imogen et ileanCoP ne laisse aucun doute sur le fait que (11) est un théorème de la logique intuitionniste du premier ordre. On laisse au lecteur qui a du temps à perdre le soin de le prouver « à la main », avec la méthode de l'Appendice A ou une autre méthode de son choix. La conclusion qui suit porte sur les leçons philosophiques des démonstrations qui viennent d'être faites.

Conclusion

Vuillemin [22] a montré que la *Géométrie* de Descartes est d'inspiration intuitionniste. C'est à partir de ce constat qu'il a jugé que les *Méditations métaphysiques* expriment une position philosophique en raison du privilège accordé à ce qu'il appelle les *jugements de méthode*. Mais aucune réponse n'avait été apportée jusqu'à présent à la question de savoir si les preuves fondamentales des *Méditations* sont conformes ou non à la logique intuitionniste telle qu'elle a été rigoureusement définie par Heyting. Cet article démontre que tel est bien le cas pour les deux premières preuves des *Méditations*, à savoir la preuve du *Cogito* et la première preuve par les effets de l'existence de Dieu. Cette dernière conduit logiquement à se débarrasser du solipsisme et il n'y a donc aucune raison de penser que *Les Méditations* ne sont pas une œuvre philosophique logiquement stable, c'est-à-dire intuitionniste d'un bout à l'autre de la chaîne des raisons.

Le fait que la première preuve par les effets soit une preuve recevable en logique intuitionniste est un résultat remarquable dans l'histoire des preuves de l'existence de Dieu. Avant

8. http://www.umsu.de/logik/trees/

Descartes, Anselme avait donné une preuve comparable, longuement et profondément analysée par Vuillemin [23]. Cependant, comme l'a déjà montré Weingartner [26, 10] la preuve du Proslogion comporte une étape illégitime d'un point de vue intuitionniste et fait de cette preuve une preuve qui n'est valide qu'en logique classique. Pour le montrer, on peut reprendre l' analyse que Vuillemin [23, p.21] donne de la preuve d'Anselme :

> La preuve d'Anselme se distingue à la fois de la preuve ontologique qui déduit l'existence de la perfection absolue et de la preuve cartésienne par l'idée du parfait en moi. Elle ressemble à cette seconde preuve en ce qu'elle fait appel à une *cogitatio* et, en ceci, elle ressemble à une preuve par les effets. Mais cette *cogitatio* est réputée impossible et c'est de cette impossibilité que l'existence divine devra être déduite. En ce sens, on peut dire que la preuve du *Proslogion* est une preuve par les effets exclus en ce qu'elle part de ce qu'il est impossible de poser en relation à l'être dont cette impossibilité démontrera l'existence.

En définissant Dieu comme « ce qui est tel que rien de plus grand ne peut être pensé », Anselme parvient à la conclusion que Dieu existe en raison même de la définition qu'il en donne. En effet « ce qui est tel que rien de plus grand ne peut être pensé ne peut exister seulement dans l'intelligence », car sinon on pourrait penser un être plus grand qui serait aussi dans la réalité et lui serait supérieur, ce qui contredirait la définition. Donc ce qui est tel que rien ne peut être pensé de plus grand *ne peut pas ne pas* être pensé comme étant aussi dans la réalité. D'où la conclusion d'Anselme [2, Proslogion, ch. II, p. 180] : « Il existe donc, sans aucun doute, quelque chose dont on ne peut rien concevoir de plus grand, et dans l'intelligence, et dans la réalité ». On remarque ici que le raisonnement d'Anselme effectue une dérivation licite en logique classique mais proscrite en logique intuitionniste : le passage de l'énoncé modal « *ne peut pas ne pas* être » à la conclusion « est nécessairement ». Or cette dérivation revient à supprimer la double négation au profit de l'affirmation, ce que refuse de façon générale la logique intuitionniste. Certes, la formule

$$\neg\Diamond\neg p \to \Box p \tag{12}$$

est un théorème de **S4**, mais **S4** est un système de logique modale *classique*. Ce que rejette la logique intuitionniste, c'est tout d'abord la formule classique et non modale

$$\neg\neg p \to p \tag{13}$$

dont la traduction modale McKinsey-Tarski est dans **S4** (9)

$$\Box(\Box\neg\Box\neg\Box p \to \Box p) \tag{14}$$

Or (14) *n'est pas* un théorème de **S4** mais de **S5**, comme l'attestent les résultats des tests réalisé à l'aide de « The Logics Workbench (10) » :

```
joseph@joseph-Inspiron-530:~$ lwb
Starting the LWB, please wait...

 LWB  -  The Logics Workbench  1.1 linux
 type 'help;' for help
```

9. Voir sur cette question Bell *et alii* [3, pp. 212-214].
10. http://www.lwb.unibe.ch/

```
> load (s4);
s4  user
s4> provable(box(box ~ box ~ box p -> box p));
false
s4> load (s5);
s5  s4  user
s5> provable(box(box ~ box ~ box p -> box p));
true
```

Il est donc incontestablement fondé, du point de vue de la logique intuitionniste, de rejeter la preuve d'Anselme. Or tel n'est pas le cas de la première preuve de l'existence de Dieu que Descartes donne dans la troisième Méditation [11], logiquement recevable dans une logique plus faible que la logique classique, elle est philosophiquement plus forte parce qu'il est plus difficile de rejeter un argument qui repose sur un noyau logique partagé aussi par les logiciens classiques.

Ce résultat signifie-t-il que la preuve de Descartes est dès lors susceptible de forcer la foi du logicien intuitionniste ? Évidemment non et une analyse du fonctionnement de la preuve permet de voir où le bât blesse. On a vu que la preuve de Descartes repose sur trois axiomes et trois énoncés factuels admis comme indubitables. La suppression d'un seul énoncé de l'ensemble des prémisses rend impossible la dérivation de la conclusion. On peut convenir de ne pas discuter des propositions 3.1 à 3.3 qui sont des définitions ou des axiomes. En revanche, la conjonction des prémisses 3.4 et 3.5 pose problème, car l'on peut évidemment contester le fait que l'on conçoit clairement et distinctement l'infini divin qui est au-delà de toute possibilité d'accroissement, c'est-à-dire, pour reprendre la définition d'Anselme, « l'être tel que rien de plus grand ne peut être pensé ». Je peux admettre que j'ai un concept de Dieu, mais refuser de reconnaître que je conçois l'infini absolu et actuel *via* un tel concept. Je peux aussi reconnaître que par définition le concept de Dieu enveloppe l'infini actuel, mais nier qu'il y ait en moi l'intuition d'un tel concept. Hobbes l'a parfaitement compris lorsqu'il écrit et répète dans les *Troisièmes Objections* que Descartes ne prouve pas que nous avons une idée de Dieu. Descartes peut bien répondre qu'il est manifeste que nous en avons une, il montre simplement que la prémisse de cette preuve outrepasse la position intuitionniste au sens strict : c'est *un acte de foi réaliste*, celui-là même que rejettent les intuitionnistes contemporains qui refusent précisément d'admettre dans les mathématiques tout élément théologique. Vuillemin a vu avec précision ce point lorsqu'il écrit [**21**, chap. 1] :

> le seul recours à la causalité et à la correspondance dans la preuve de l'existence de Dieu à partir de son idée en moi ne saurait produire un cercle qui ne figurerait pas déjà dans le contenu même de l'idée de Dieu.

L'intuitionniste authentique peut admettre aisément qu'un enchaînement de dérivations logiques dépasse l'intuition mais reste légitime tant que l'on peut vérifier pas à pas, quel que soit le temps que cela puisse prendre, que chaque dérivation est logiquement recevable. En cela les outils d'aide à la vérifications des théorèmes sont les bienvenus, comme on a pu le

11. Contrairement à ce que j'avais cru et développé dans un brouillon fautif.

voir ; mais la présence au sein de raisonnements logiquement corrects d'éléments absolument non constructifs, non décidables ou non vérifiés, ou encore non intuitifs, frappe aussitôt le résultat de la preuve intuitionniste du même doute que tout ce qui relève de preuves non constructives dans les mathématiques classiques. S'il est démontrable que la première preuve de l'existence de Dieu que donne Descartes est recevable du point de vue intuitionniste, il n'est ni prouvé ni attesté que nous ayons le concept de Dieu que Descartes prête au *Cogito*. Ce dernier point est condamné à rester une question de foi, et non de logique.

Appendice A
La logique intuitionniste du premier ordre

Le symbolisme utilisé dans cet article est standard, tant pour la constante du vrai $\top$, du faux $\bot$, de la négation $\neg$, de la conjonction $\wedge$, de la disjonction $\vee$, de l'implication $\rightarrow$, la quantification universelle $\forall$ et la quantification existentielle $\exists$. On a aussi adopté la convention relâchée mais commode qui consiste à adopter les dernières lettres de l'alphabet, la plupart du temps x, y z, comme variables d'individus et les premières lettres de l'alphabet a,b,c,d, comme symboles de constantes d'individus.

Définition A.1. — **Négation intuitionniste**

$$\neg A \Leftrightarrow A \rightarrow \bot \qquad (Def.\neg)$$

Définition A.2. — **Modèles de Kripke**

Dans l'ensemble des formules de la logique intuitionniste du premier ordre, un modèle de Kripke est une structure $K = (|K|, \leq, \rho, \Vdash)$ tel que, *intuitivement* :

- $|K|$ **modélise le temps**, avec un minimum ρ (un "maintenant"),
- $\leq$ une relation d'ordre partiel (préordre) pour définir **l'ordre du temps**, et
- $\Vdash$ une relation dite de "forcing" (réalisation) $\Vdash$ jouant le rôle de *fonction d'évaluation* d'une formule A à l'instant α.

"$\alpha \Vdash A$" dit "A est vraie à l'instant α".

On peut alors étendre la relation de forcing à toutes les formules :

(1) Si $\alpha \Vdash A$ et si $\alpha \leq \beta$, alors $\beta \Vdash A$ (propriété de "monotonie" ou de "persistance" : le vérifié ou le prouvé reste toujours vérifié ou prouvé) ;

(2) $\alpha \Vdash \top$, $\alpha \nVdash \bot$;

(3) $\alpha \Vdash A \wedge B$ si et seulement si $\alpha \Vdash A$ **et** $\alpha \Vdash B$;

(4) $\alpha \Vdash A \vee B$ si et seulement si $\alpha \Vdash A$ **ou** $\alpha \Vdash B$;

(5) $\alpha \Vdash A \rightarrow B$ si et seulement si pour tout β tel que $\alpha \leq \beta$, $\beta \Vdash A$ implique $\beta \Vdash B$;

(6) $\alpha \Vdash \neg A$, si et seulement si quel que soit β tel que $\alpha \leq \beta$, $\beta \nVdash A$ (i.e. $\beta \Vdash A$ n'est pas le cas).

(7) **Remarque :** $\alpha \nVdash A$ *n'implique pas* $\alpha \Vdash \neg A$ mais dit seulement "A **n'est pas prouvée à l'instant** α (*mais peut-être plus tard !*)".

Définition A.3. — **Procédure de preuves**

La procédure de preuve utilisée est celle donné par Bell, DeVidi et Solomon [3, chap. 5, pp. 184-223] qui a l'immense mérite d'être actuellement la plus simple à utiliser.

TABLE 1. Règles intuitionnistes pour les arbres de Beth en logique du premier ordre

	Disjonction	**Conjonction**	**Implication**
Affirmée	$A \vee B$ $A \quad B$	$A \wedge B$ A B	$A \to B$ $?A \quad B$
Non affirmée (douteuse)	$?(A \vee B)$ ✔ $?A$ $?B$	$?(A \wedge B)$ ✔ $?A \quad ?B$	$\underline{?(A \to B)}$✔ A $?B$

	Equivalence	**Négation**
Affirmée	$A \leftrightarrow B$ $A \quad ?A$ $B \quad ?B$	$\neg A$ $?A$
Non affirmée (douteuse)	$?(A \leftrightarrow B)$ ✔ $?(A \to B) \quad ?(B \to A)$	$\underline{?\neg A}$ ✔ A

Instanciation de $\forall$	**Instanciation de** $\exists$	**Instanciation de** $?\forall$	**Instanciation de** $?\exists$
$\forall x Fx$ Fc (*c non inédite* : pouvant être reprise dans la liste des lettres déjà utilisées)	$\exists x Fx$ ✔ Fc (*c inédite* : ne pouvant être dans la liste des lettres déjà utilisées.)	$\underline{?\forall x Fx}$ ✔ $?Fc$ (*c inédite*)	$?\exists x Fx$ $?Fc$ (*c non inédite*)

– **Règles de transformation des formules** : données dans la Table 1, page 21.
– **Règles de cochage** : On appose une coche ✔ pour indiquer que l'on désactive la formule une fois celle-ci transformée par l'application de la règle. Les formules qui ne sont jamais cochées sont les formules affirmées (celles qui ne sont pas précédées de ?) et qui sont *transportables* de haut en bas à travers les traits horizontaux qui marquent le passage d'un état de la connaissance à un autre : leur vérité persiste à travers ces états.
– **Règle de transport** Il est permis de transporter n'importe quelle formule qui n'est pas précédée du signe ? à travers les lignes horizontales introduites par les règles $?\to$, $?\neg$ et $?\forall$.
– **Règle de clôture** : Pour qu'une branche soit fermée il faut deux conditions :

(1) l'affirmation d'une formule quelconque P et sa non-affirmation $?P$ apparaissent dans la même branche,

(2) que P et $?P$ ne soient pas séparés par un trait horizontal.

– **Règle de la fourche** Bell *et alii* [3, p. 199] notent qu'il est important de remarquer que l'application répétée des règles ? → et ?¬ dans une même branche apparaissant à un même état du savoir - donc dans une branche qui n'est pas coupée par un trait horizontal - doit nécessairement entraîner l'introduction de lignes horizontales et séparées pour chaque application des règles.

N.B. : Dans un tel cas il suffit qu'*une seule branche de la fourche* soit fermée pour que *la branche qui a donné naissance à la fourche* soit aussi fermée (c'est-à-dire contradictoire), comme le montre l'exemple A.6, où l'on doit considérer que c'est la branche initiale (1. à 4.), celle qui a donné naissance à la fourche, qui est complètement fermée parce qu'elle conduit à une situation contradictoire.

Exemple A.4. —

$$\nvdash_i (A \to B) \lor (B \to A)$$

Démonstration. —

1. $?((A \to B) \lor (B \to A))$
2. $?(A \to B)_{(1)}$ ✔
3. $?(B \to A)_{(1)}$ ✔

4. $A_{(2)}$	6. $B_{(3)}$
5. $?B_{(2)}$	7. $?A_{(3)}$

□

Remarque A.5. — Sans la règle de la fourche, la règle de transport permettrait la clôture de la branche et rendrait donc incorrect le test de la formule $(A \to B) \lor (B \to A)$.

Exemple A.6. —

$$\vdash_i \neg A \to \neg(A \land \neg B) \lor \neg B \tag{15}$$

Démonstration. —

1. $?(\neg A \to (\neg(A \land \neg B) \lor \neg B)$✔
2. $\neg A_{(1)}$
3. $?\neg(A \land \neg B)_{(1)}$ ✔
4. $?\neg B_{(1)}$ ✔

5. $A \land \neg B_{(3)}$ ✔	6. $B_{(4)}$
7. $A_{(5)}$	
8. $\neg B_{(5)}$	
9. $\neg \boldsymbol{A}_{(2)}$	
10. $\boldsymbol{?A}_{(9)}$	
×	

□

– **Règle de lecture du résultat du test :** Un arbre de réfutation intuitionniste est un test de validité d'une formule qui se lit quand et seulement quand l'arbre est totalement développé. Un arbre de réfutation est totalement développé quand tous les connecteurs ¬, ∧, ∨, →, ↔ ont été éliminés, quand toutes les formules actives ont été cochées, et quand la règle de transport n'est plus applicable. Si toutes les branches d'un arbre totalement développé sont fermées, alors la formule qui a fait l'objet du test est valide en logique intuitionniste ; sinon chaque branche ouverte donne un contre-modèle de Kripke de la formule et montre que la formule testée n'est pas prouvable en logique intuitionniste.

Références

[1] ALQUIÉ, F. – *La découverte métaphysique de l'homme chez Descartes*, Presses Universitaires de France, Paris, 1950, 1987.

[2] ANSELME, (SAINT) – *Œuvres philosophiques*, Aubier, Paris, 1967, tr. fr. de *Monologion-Proslogion-De Veritate-De Libero-Arbitrio-De Concordia-De Voluntate*, par P. Rousseau.

[3] BELL, J.L. & DEVIDI, D. & SOLOMON, G. – *Logical Options : An Introduction to Classical and Alternative Logics*, Broadview Press, Peterborough, Ontario, Canada, 2001.

[4] BROUWER, L.E.J. – « De Onbetrouwbaarheid der logische Principes », *Tijdrschrift voor Wijsbegeerte* (1908), p. 152–8, en. tr. in *L.E.J. Brouwer Collected Works*, I, 1975, pp. 107-11 ; trad. fr. in *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, J. Largeault (ed.), Vrin, Paris, 1992, pp. 15-23.

[5] GUENANCIA, P. – *Descartes - Bien conduire sa raison*, Gallimard, Paris, 1996.

[6] ______, *Lire Descartes*, Folio Essais, Gallimard, Paris, 2000.

[7] GUEROULT, M. – *Descartes selon l'ordre des raisons*, vol. 1, Aubier - Montaigne, Paris, 1968.

[8] ______, *Descartes selon l'ordre des raisons*, vol. 2, Aubier - Montaigne, Paris, 1968.

[9] HINTIKKA, J. – « *Cogito, Ergo Sum* : Inference or Performance ? », in Lambert, K. [11], p. 145–170.

[10] KIJANIA-PLACEK, K. & WOLENSKI, J. (éd.) – *The Lvov-Warsaw School and Contemporary Philosophy*, Synthese Library, vol. 273, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[11] LAMBERT, K. (éd.) – *Philosophical Applications of Free Logic*, New-York, Oxford, Oxford University Press, 1991.

[12] ______, *Free Logics, Their Foundations, Character, and Some Applications Thereof*, ProPhil - Projekte zur Philosophie, vol. 1, Academia Verlag, Sankt Augustin, 1997.

[13] MCLAUGHLIN, S. & PFENNING, F. – « Efficient Intuitionistic Theorem Proving with the Polarized Inverse Method », in *CADE* (Schmidt, R.A., éd.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 5663, Springer, 2009, p. 230–244.

[14] ONG-VAN-CUNG, K.S. (éd.) – *Descartes et la question du sujet*, Débats philosophiques, Paris, Presses Universitaires de France, 1999.

[15] PARIENTE, J.-C. – « La première personne et sa fonction dans le *Cogito* », in Ong-Van-Cung, K.S. [14], p. 11–48.

[16] SPINOZA, B. – *Oeuvres complètes*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, Paris, 1954, Traduction, présentation et notes par Callois, Francès et Misrahi.

[17] STEINER, M. – « Cartesian Scepticism and Epistemic Logic », *Analysis* **39** (1979), no. 1, p. 38–41.

[18] VAN ATTEN, M. – « The Development of Intuitionistic Logic », in *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Stanford University, http://plato.stanford.edu/entries/intuitionistic-logic-development/, 2008, revision 2009.

[19] VIDAL-ROSSET, J. – « Intuitionnisme (logique, philosophie) », in *Dictionnaire des Idées*, Encyclopædia Universalis, 2005, p. 422–424.

[20] ______, « L'argument de Russell-Tennant », in *Autour des Principia Mathematica, B. Russell et A. N. Whitehead 1910-1913* (Dijon) (A. Guay, éd.), Éditions universitaires de Dijon, 2011, p. 149–177.

[21] VUILLEMIN, J. – « Etre et Choix - Eléments de philosophie réaliste », Manuscrit inédit des Archives Vuillemin, Université de Lorraine, Archives Poincaré, UMR 7117 du CNRS, Nancy.

[22] ______, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Presses Universitaires de France, Paris, 1960, 1987.

[23] ______, *Le Dieu d'Anselme et les apparences de la raison*, Aubier Montaigne, Paris, 1971.

[24] ______, « Trois philosophes intuitionnistes : Epicure, Descartes, Kant », *Dialectica* **35** (1981), p. 21–41.

[25] ______, *Nécessité ou Contingence, l'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*, Minuit, Paris, 1984.

[26] WEINGARTNER, P. – « Forgotten and Neglected Solutions of Problems in Philosophical Logic », in Kijania-Placek, K. & Wolenski, J. [10], p. 379–393.

JOSEPH VIDAL-ROSSET, Archives Poincaré, 91 avenue de la Libération, BP 454, F-54001 NANCY Cedex
E-mail : joseph.vidal.rosset@gmail.com