La distinction kantienne entre jugement analytique et jugement synthétique a-t-elle un sens?

Joseph Vidal-Rosset
Université de Bourgogne
joseph.vidal-rosset@u-bourgogne.fr

27 novembre 2006

Table des matières

Résumé

Dieser Artikel setzt sich erstens zum Ziel, die Geschichte des Unterschieds zwischen analytischen und synthetischen Urteilen seit Kant zu erhellen, und zweitens den Sinn dieses Unterschieds zu bestimmen. Couturat hat Kants These des apriorischen synthetischen Charakters der mathematischen Wahrheiten hart kritisiert. Diese Kritik war von Russell inspiriert : wenn die Logik analytisch, ist dann ist die Mathematik es ebenfalls. Und wenn Gödel die Unvollkommenheit der elementarischen Zahlenlehre bewiesen hat, hat er zugleich bewiesen, dass die Arithmetik nicht analytisch im Sinne Kant ist, und damit ist er mit Poincaré einverstanden der seine Argumentation gegen Russell gerichtet hatte. Wenn aber alle arithmetischen Wahrheiten nicht analytisch sind, folgt daraus nicht, dass man damit ihren apriorischen synthetischen Charakter bewiesen hat. Quine hat gezeigt, dass man keine eine scharfe Grenze zwischen solchen Sätzen ziehen kann. Seine Argumentation zeigt aber, welche Gründe uns erlauben, die Analyzität an die Seite der logischen Folgerung zu stellen, und warum wir diesen Unterschied nicht ablehnen sollen, insofern er das mathematische Wissen erhellt.[1]

1 Introduction : l'invention kantienne de la distinction entre jugement analytique et jugement synthétique

On sait que la question fondamentale de la *Critique de la Raison pure* est "comment les jugements synthétiques *a priori* sont-ils possibles ?" et que l'existence de ces jugements, dont Kant ne doute pas, permet alors d'expliquer à la fois la possibilité de la métaphysique et celle de la mathématique. Développer pour lui-même le point de vue de Kant n'est pas mon propos. Celui-ci est à la fois plus simple et plus ambitieux : il s'agit de voir comment la distinction kantienne de l'analytique et du synthétique a engendré une dispute à la fois sur la nature des mathématiques et sur le sens de la distinction elle-même. Je m'efforcerai d'expliquer comment les théorèmes de complétude et d'incomplétude démontrés par Gödel permettent de départager les positions philosophiques sur la nature des vérités de l'arithmétique et sur l'utilité de la distinction kantienne. Reprenons la distinction telle que Kant la formule :

> Ou bien le prédicat B appartient au sujet A comme déjà contenu (implicitement) dans ce concept A, ou bien B, quoique lié à ce concept A, est entièrement en dehors de lui. Dans le premier cas je nomme le jugement analytique, je l'appelle synthétique dans le second.[2]

Kant donne pour exemple de jugement analytique :

"tous les corps sont étendus" (1)

et pour exemple de jugement synthétique :

"tous les corps sont pesants" (2)

Il explique aussi cette distinction au § 36 de la *Logique* :

[1] Je remercie vivement Jean-Claude Gens pour la traduction de ce résumé en Allemand.
[2] [Kant, 1976], III, 32/IV, 19

> A tout x auquel convient le concept de corps $(a+b)$, convient aussi l'étendue (b), c'est un exemple de jugement analytique. A tout x auquel convient le concept de corps $(a+b)$ convient aussi l'attraction (c), c'est un exemple de jugement synthétique.'[3]

Cependant la formalisation de (1) et de (2) montre que les deux exemples pris par Kant ont exactement la même forme logique, à savoir :

$$(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \tag{3}$$

Outre la remarque justifiée de Couturat sur l'erreur que commet Kant lorsqu'il semble réduire, comme Leibniz l'a fait avant lui, tous les jugements à des jugements de prédication (c'est-à-dire à l'usage des seuls prédicats monadiques), on peut donc déjà supposer que seule la construction d'une sémantique rigoureuse pourrait peut-être permettre de décider à propos d'un énoncé quelconque si celui-ci est analytique ou s'il est synthétique, puisque les exemples choisis par Kant montrent qu'un énoncé analytique et un énoncé synthétique peuvent être syntaxiquement indiscernables.

Ces définitions n'expliquent pas cependant pourquoi Kant tient les jugements mathématiques pour des jugements synthétiques *a priori* et non pas pour des jugements analytiques. L'intuition qui guide Kant est qu'à la différence des déductions logiques, les théorèmes de l'arithmétique accroissent notre connaissance alors que la conclusion d'un syllogisme valide n'est rien d'autre qu'une vérité déjà contenue dans les prémisses : "(7+5) = 12" m'apprend que la somme de 7 et de 5 font 12, alors que l'énoncé "tous les hommes sont mortels" ne semble apporter rien de nouveau lorsqu'il apparaît comme la conséquence logique de la conjonction des énoncés "tous les hommes sont des êtres vivants" et " tous les êtres vivants sont mortels". Le concept de la somme de 7 et de 5 n'est pas contenu dans celui de 12, mais dans dans une synthèse qui repose sur un principe d'unité synthétique *a priori*. Cette synthèse qui, selon Kant, se fait d'après des concepts, suppose une intuition pure elle-même au principe du nombre et de la grandeur. La logique est stérile, la mathématique ne l'est pas, telle est l'opinion qui conduit Kant à établir une frontière à l'aide de l'analytique et du synthétique entre les deux disciplines.

Encore une fois, mon propos n'est pas d'entrer dans le détail de la théorie kantienne de l'intuition et du schématisme. Couturat a souligné les hésitations que trahissent les écrits de Kant au sujet de la nature du nombre, hésitant entre intuition du temps, de l'espace, ou bien encore concept purement intellectuel. Il suffit de remarquer que Kant établit une triple distinction entre l'analyticité qui est par définition *a priori* et la synthèse qui est ou bien *a posteriori* lorsqu'elle est

[3] Cité par Couturat dans [Couturat, 1904], la pagination citée est celle de [Couturat, 1980], p. 240

empirique, ou bien *a priori* lorsqu'elle est la condition de possibilité de la connaissance scientifique. Je vais concentrer mon analyse uniquement sur la question du caractère analytique ou bien synthétique *a priori* des vérités de l'arithmétique et sur ce que la distinction kantienne apporte pour la compréhension de celles-ci.

2 La critique logiciste de Russell-Couturat à l'égard de la conception kantienne des mathématiques

Le logicisme, tel qu'il est apparu dans l'histoire de la philosophie de la connaissance, est fondé sur la thèse de la réductibilité des mathématiques à la logique. On verra pourquoi les travaux de Gödel ont entraîné l'abandon de la thèse logiciste. Mais il n'en reste pas moins vrai que certaines critiques russelliennes formulées par Couturat à l'égard des arguments que Kant avance pour défendre la thèse du caractère synthétique *a priori* des mathématiques, restent définitivement pertinentes. Couturat a redéfini d'une façon à mon avis parfaitement claire et authentiquement kantienne, la distinction de l'analytique et du synthétique :

> Tout ce qui est contenu dans la définition d'un concept ou s'en déduit logiquement en est un cactère analytique ; tout ce qui s'y ajoute, fût-ce en vertu d'une nécessité extra-logique, est un caractère synthétique. Il faut donc dire, pour conserver autant que possible l'esprit, sinon la lettre de la doctrine kantienne : un jugement est analytique, lorsqu'il peut se déduire uniquement des définitions et des principes de la Logique. Il est synthétique, si sa démonstration (ou sa vérification) suppose d'autres données que les principes logiques et les définitions.[4]

Or en vertu de cette définition de l'analyticité, Couturat démontre le caractère analytique de l'énoncé "7 + 5 = 12" uniquement par substitution des termes égaux ou identiques. Je reformule ici sa démonstration en choisissant pour plus de briéveté l'énoncé "2+2 = 4" :

Définitions :

$$2 = (1+1), 3 = (2+1), 4 = (3+1)$$

En vertu de la définition de la somme on a :

$$a + (b+1) = (a+b)+1$$

Donc :

$$2+2 = 2+(1+1) = (2+1)+1 = 3+1 = 4$$

C. q. f. d.

[4] [Couturat, 1904], désormais cité à partir de [Couturat, 1980], p. 246

Couturat a donc raison de conclure qu'une telle démonstration est "plus simple et plus *analytique* qu'aucun syllogisme", s'il doit exister des degrés dans l'analyticité (et l'on verra en quel sens cela est le cas). Il suffit de faire la démonstration d'un syllogisme quelconque à l'aide de la méthode des arbres pour se convaincre que celle-ci est effectivement plus complexe que la démonstration de "2 + 2 = 4" telle qu'elle vient d'être donnée.

On pourrait imaginer que, pour sauver la position de Kant, l'on réplique que les deux expressions sont en fait différentes du point de vue intensionnel, que "$(7+5)$" n'a pas la même signification que "12", qu'il indique une somme dont la signification serait absente de "12". Mais une telle riposte n'est pas recevable pour plusieurs raisons. La première est que le contexte de l'énoncé tout entier "$7+5=12$" est purement extensionnel et qu'il n'est nulle part question d'intension. Le second est que même si l'on acceptait d'envisager au moins l'un des deux membres de l'égalité sur le plan intensionnel, alors c'est l'égalité elle-même qui deviendrait problématique puisque si l'on veut dire que "$7+5$" n'a pas la même signification que "12", alors il ne serait plus question d'affirmer l'égalité de ces deux expressions. Si en revanche l'expression "$7+5=12$" est envisagée de manière habituelle, c'est-à-dire comme une expression purement dénotative, alors elle est n'est pas moins analytique que "tous les corps sont étendus".

Couturat remarque que l'expression arithmétique choisie par Kant est même d'une certaine façon plus évidemment analytique que celle portant sur les corps et l'étendue, puisque celle-là elle indique une *identité*, alors que celle-ci exprime une définition que l'on peut traduire en termes essentialistes : il est de l'essence des corps d'être étendus. La spatialité fait partie de la définition des corps et l'on a donc ici l'inclusion d'un concept dans un autre ; en revanche $(7+5)$ et 12 se confondent et sont substituables l'un à l'autre dans les contextes extensionnels.

Enfin pour Kant, l'origine empirique ou l'existence des choses sur lequelles les concepts portent ne contredisent pas le caractère analytique de (1) ou de l'énoncé "l'or est jaune" : "Toutes les propositions analytiques sont des jugements *a priori*, alors même que leurs concepts sont empiriques" écrit-il au § 2 b des *Prolégomènes*, Couturat en conclut qu'une telle position prouve que le caractère logique du jugement ne dépend nullement de l'origine du concept qui est toujours le produit d'une synthèse (empirique ou *a priori*).[5] Or l'énoncé arithmétique choisi par Kant est totalement *a priori*, il est donc plus évidemment analytique que celui qui donne la définition des corps.

[5][Couturat, 1980], p. 263, note 2

3 Le théorème d'incomplétude et l'erreur du logicisme

Si l'analyse de Couturat est à la fois précise et exacte en de nombreux points, elle commet cependant une erreur que ni Couturat ni aucun de ses contemporains ne pouvaient apercevoir. Je souligne la méprise de Couturat dans la citation qui suit, où Couturat critique la conception kantienne des vérités arithmétiques comme vérités intuitives :

> Si les vérités arithmétiques étaient réellement intuitives, il ne serait pas si difficile de s'assurer qu'un nombre premier est donné, ou de vérifier (je ne dis pas : de démontrer) le fameux théorème de Goldbach : "Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers". En réalité, il y a là une erreur fondamentale sur la nature des vérités arithmétiques singulières, *qui sont toutes démontrables* ; les seules vérités primitives ou indémontrables de l'Arithmétique sont des propositions générales ou axiomes, dont précisément Kant ne s'occupe pas.[6]

La faute réside dans le fait d'affirmer que *toutes* les vérités singulières de l'arithmétique sont démontrables, mais Couturat ne peut que l'ignorer, car il écrit ce texte 27 ans avant la démonstration faite par Gödel de l'incomplétude de la théorie des nombres, démonstration qui exhibe précisément, dans la syntaxe de l'arithmétique formelle, un énoncé singulier qui n'est pas un axiome de l'arithmétique et qui, si l'arithmétique est cohérente, est vrai mais indémontrable. Couturat a eu le mérite d'avoir été un des très rares français, peut-être le seul à son époque, à comprendre l'importance philosophique des travaux de Russell. Mais il ne pouvait pas anticiper des théorèmes que nul ne soupçonnait possibes avant Gödel. Ceux-ci ont entraîné des débats philosophiques difficiles, où la question de la distinction de l'analytique et du synthétique a régulièrement été soulevée.

Que l'idée d'une réduction de la mathématique à la logique soit une erreur, Poincaré en avait eu l'intuition avant Gödel et ce dernier a reconnu l'affinité de son raisonnement avec celui du savant français : la réduction de l'induction mathématique à une logique d'ordre supérieur à celle du premier ordre ne serait possible qu'à la condition que l'on fasse usage de l'induction mathématique. Le caractère circulaire d'un tel procédé montre que Poincaré était parfaitement lucide lorsqu'il écrivait, dès le premier chapitre de [Poincaré, 1902] règle du raisonnement par récurrence est "le véritable type même du jugement synthétique *a priori*".[7] Gödel a donné une démonstration incontestable de la justesse de l'intuition de Poincaré et

[6][Couturat, 1980], p. 257

[7][Poincaré, 1902], p. 41 de l'édition 1968.

lui a donné raison dans sa querelle avec Russell. Mais comme je viens de montrer que Couturat, en suivant Russell, a démontré l'erreur de Kant au sujet du caractère prétendument synthétique *a priori* de l'énoncé "$7+5=12$", il est nécessaire pour que l'on me suive que je fasse la lumière sur l'usage des théorèmes de Gödel pour éclaircir la distinction de l'analytique et du synthétique.

Impressionnés par les progrès de la logique mathématisée, Russell et Couturat ont pensé que Kant s'était trompé sur la nature de la mathématique et avait méjugé la logique. Celle-ci, dans leur esprit, devait au contraire être considérée comme féconde puisque la mathématique en dérivait. L'analyticité, qui caractérisait alors aussi bien la logique que la mathématique, n'était plus synonyme de stérilité. Mais, d'une part, Russell entendant par "Logique" le système des *Principia Mathematica*, qui est un système logique incluant la théorie des ensembles, la réduction n'était pas réelle. D'autre part, le théorème d'incomplétude de Gödel, qui porte originellement sur les *Principia*,[8] a mis à jour, une distinction de la logique proprement dite et de la théorie des ensembles. A juste titre Quine a régulièrement insisté sur ces faits.[9] Examinons les d'un peu plus près.

En inventant un ingénieux système de codage défini dans la syntaxe de la théorie élémentaire des nombres (en suivant l'usage appelons la PA pour "Peano Arithmetic"), Gödel a démontré en 1931 qu'il est possible de construire dans le langage de PA un énoncé G qui affirme sa propre indémontrabilité, et qui, si la théorie est cohérente, doit effectivement être vrai, c'est-à-dire non démontrable, sinon cette théorie pourrait prouver des énoncés faux. C'est là le premier théorème d'incomplétude. Le second théorème d'incomplétude démontre qu'il est impossible de prouver que PA est cohérent à partir de PA uniquement. On peut alors légitimement donner au théorème une portée universelle en affirmant que, dans tout système formel correct S au moins équivalent à la théorie élémentaire des nombres, il est toujours possible de construire des énoncés vrais mais indémontrables, autrement dit qui échappent à la S-dérivabilité, et qu'aucun système formel correct suffisamment puissant ne peut démontrer sa propre cohérence. Cette démonstration a historiquement porté un coup fatal au projet de Hilbert d'apporter une preuve de la cohérence des mathématiques, en montrant qu'un tel espoir était vain à la base de l'édifice, dès l'arithmétique élémentaire.

Il reste à dire pour quelle raison précise les théorèmes de Gödel tracent une frontière entre logique et mathématique et en quel sens ils permettent de retrouver la distinction kantienne entre l'analytique et le synthétique. Pour cela il est nécessaire de faire appel non seulement au théorème d'incomplétude, mais aussi au théorème de complétude[10]. Ce dernier permet d'affirmer, dans tout système

[8] [Gödel, 1931]et [Nagel E., 1989]

[9] Voir par exemple [Quine, 1970], chap. 5

[10] [Gödel, 1930]

formel S du premier ordre, non la complétude du système S lui-même, mais celle de la relation logique de dérivabilité dans S. Cela signifie que, si une formule φ de S est *valide* (c'est-à-dire *vraie dans tous les modèles* de S) alors φ est dérivable (c'est-à-dire démontrable) dans S, ce qui s'écrit : si $\models \varphi$ alors $\vdash \varphi$.

[Gödel, 1930] démontre donc que le calcul des prédicats du premier ordre (noté LPC suivant une convention en usage pour *the Lowest Predicate Calculus*) est une théorie logique sémantiquement complète : toutes les vérités de ce calcul sont des formules valides et donc des formules démontrables. Cela signifie que les formules valides de LPC (comme par exemple $(\exists y)(\forall x)Rxy \vdash (\forall x)(\exists y)Rxy$) sont non seulement démontrable, mais qu'elles peuvent être vérifiées lorsqu'on les interprête correctement dans tout système formel du premier ordre, que ce soit dans PA ou dans une théorie des ensembles comme ZFC. On peut remarquer enfin que, bien que LPC introduise la notion d'individu *via* les variables d'individu, cette logique du premier ordre peut être purgée de toute assomption existentielle (comme en témoigne l'invention des *free logics*[11]).

La différence de LPC avec une théorie comme PA saute alors aux yeux : à toute vérité (c'est-à-dire à toute formule valide) de LPC correspond une démonstration, ce qui n'est pas le cas dans une théorie mathématique comme PA, puisque le théorème d'incomplétude démontre que l'ensemble des vérités de PA et l'ensemble des formules valides de PA ne sont pas coextensifs. La démonstration de l'incomplétude de PA permet donc d'établir une distinction rigoureuse entre logique et mathématique.

Enfin, même si en suivant Couturat, on acceptait la thèse de l'analyticité des vérités de l'arithmétique, l'énoncé indépendant de Gödel contraint d'étendre le domaine des vérités de PA au-delà de ce qui est démontrable dans PA. Le caractère synthétique de l'énoncé G de Gödel est indiscutable lorsque l'on observe que la vérité de G apparaît sous l'hypothèse de la cohérence de PA, qui n'est elle-même prouvable qu'à partir d'un système plus fort que PA. C'est à l'aide d'une théorie de la satisfaction (notée TS) comme celle de Tarski par exemple, qu'il est possible de prouver G, dans le jargon des logiciens on dit que TS est “une extension non conservative” de PA.[12] La formule $PA \cup TS \vdash G$ montre la synthèse de PA - dans le langage duquel G est formulé - et de la métathéorie TS qui permet, à partir de PA, de prouver G. On peut donc conclure que le caractère analytique de l'ensemble des vérités de l'arithmétique a été définitivement réfuté par Gödel, ce qui au moins permet de trancher la querelle philosophique de la façons suivante : si l'on peut accepter la thèse de l'analyticité des vérités de l'arithmétique lorsqu'on se limite au domaine du décidable, celle-ci doit se limiter au décidable et l'on doit admettre que, la reconnaissance de la vérité d'un énoncé démonstrativement indécidable

[11] voir par exemple [Lambert, 1997]

[12] Voir sur ce point [Ketland, 1999]

dans un système S, enveloppe une synthèse qui fasse de S le langage-objet d'une méta-théorie $S*$.

Mais si la vérité d'un énoncé indépendant peut être à son tour prouvée dans un système plus puissant, on peut alors douter du caractère rigide de la distinction entre l'analytique et le synthétique. L'examen de ce doute va faire l'objet de la dernière section.

4 Faut-il abandonner le dogme de la distinction entre l'analytique et le synthétique ?

Une des thèses les plus célèbres de Quine est celle de sa remise en cause de la distinction entre l'analytique et le synthétique. Malheureusement, l'argument subtil de Quine a très souvent été mal compris et on lui a donné une portée qu'il n'a en réalité jamais eue, en dépit des outrances des conclusions de [Quine, 1951]. Je vais dans un premier temps résumer l'argument que Quine contre la distinction de l'analytique et du synthétique pour ensuite tenter de montrer la signification logique exacte de cet argument.

Avec justesse, Quine remarque que l'on peut établir une distinction entre deux classes d'énoncés qui sont habituellement qualifiés d'analytiques. La première contient les énoncés qui sont analytiques parce que *logiquement vrais*, la seconde ceux qui le sont parce que vrais en vertu de la seule définition des termes employés. Il est en effet évident que la vérité de

$$\text{“aucun homme non marié n'est marié”} \tag{4}$$

diffère celle de

$$\text{“aucun célibataire n'est marié”} \tag{5}$$

Le premier de ces deux énoncés est une tautologie de la forme :

$$\neg(\exists x)(Mx \wedge \neg Mx) \tag{6}$$

alors que la formalisation de (5) montre qu'il ne s'agit pas d'une vérité de la logique puisque l'on obtient la formule simplement cohérente :

$$\neg(\exists x)(Cx \wedge Mx) \tag{7}$$

Quine en conclut que si (5) peut être dit “analytique”, ce n'est que parce que l'on considère que “célibataire” et “non marié” sont synonymes. Si l'on suit [Carnap, 1997], on peut considérer cette synonymie comme le résultat d'un postulat de signification. L'incompatibilité des termes “marié” et “célibataire” ne serait pas, selon Carnap, une question de connaissance, “mais une question de décision”, autrement dit établir une équivalence entre un prédicat et la négation d’un autre devient une affaire de convention qui, dès qu’elle est admise, donne à une formule comme (7) un caractère analytique puisqu’elle pourrait traduire la synonymie cognitive qui existe dans (5).[13]

La difficulté soulevée par le procédé carnapien des postulats de signification est que l’on ne voit pas comment nier que ceux-ci s’établissent à partir d’un apprentissage de la langue ordinaire où les synonymies apprises ne diffèrent pas par nature d’autres généralisations empiriques qui sont faites à propos des mots comme à propos des choses. Un empiriste comme Quine qui n’accorde aucun sens à l’idée d’une synthèse *a priori* refuse de comprendre que l’on puisse affirmer dogmatiquement que (5) et (1) sont analytiques, et que (2), que Kant choisi pour exemple, ne l’est pas.

Si l’on tente d’éclairer la prétendue analyticité de l’énoncé à l’aide de la notion de synonymie, on ne fait que déplacer le problème, puisqu’il s’agit alors d’expliquer la notion de synonymie. On peut tenter de le faire à l’aide de l’équivalence dans un langage extensionnel : deux termes sont équivalents si et seulement si ils sont substituables *salva veritate* dans tous les contextes. Si “célibataire” et “non marié” sont des termes synonymes, alors (5) se réduit à (4) parce que ces termes sont substituables *salva veritate* dans des contextes extensionnels et purement dénotatifs, c’est-à-dire dans des contextes où il n’apparaissent ni dans ce que l’on appelle des “attitudes propositionnelles” (comme “X pense que...”) ni, d’une façon générale à l’intérieur de guillemets. Les administrations entendent par “célibataires” les personnes qui ne sont pas mariées et l’on peut substituer, dans les textes de lois et les décrets, “non marié” à “célibataire” sans changer pour autant le contenu des lois. On dira de ceux-ci qu’ils relèvent d’un langage extensionnel où la synonymie ne pose pas de problème logique particulier.

Mais supposons qu’un étranger affirme sincèrement :

J’ignore le sens du mot “célibataire” (8)

Alors on peut imaginer qu’il soit possible de lui expliquer la signification de ce terme à l’aide de “non marié”, ce qui montre bien que, dans un contexte intensionnel comme celui illustré par (8), on ne peut substituer deux termes habituellement coextensifs sans risquer changer la valeur de vérité des énoncés où ils apparaissent.

Or, c’est ce dernier point qui précisément est le hic. Car, comme le souligne Quine, bien que la substituabilité *salva veritate* reste dans la plupart des cas la meilleure méthode pour expliquer la synonymie, l’équivalence dans les langages extensionnels échoue à rendre compte de ce que Quine appelle “la synonymie

[13] [Carnap, 1997], pp.335-345

cognitive" contenue dans (5). Les expressions "créatures ayant un coeur" et "créatures ayant des reins" sont par exemple des expressions extensionnellement équivalentes dès lors qu'elles désignent exactement le même ensemble de créatures, mais il est évident qu'elles n'ont pas la même synonymie cognitive puisque les qualités par lesquelles elles désignent ces individus sont différentes. Les termes "célibataire" et "non marié" sont au contraire synonymes d'un point de vue cognitif parce qu'on entend habituellement par "célibataire" une personne non mariée. La substituabilité dans des langages extensionnels n'apporte par conséquent pas un compte rendu satisfaisant de l'analyticité de (5) :

> Rien ne nous garantit ici que l'accord extensionnel de "célibataire" et de "personne non mariée" repose sur la signification plutôt que sur des faits accidentels, comme c'est le cas de l'équivalence extensionnelle entre "créature ayant un coeur" et "créature ayant des reins".[14]

On peut tenter, en désespoir de cause, d'expliquer la notion d'analyticité en se tournant à nouveau vers les règles sémantiques telles que Carnap les décrit. Mais on se heurte alors au cercle suivant :

> Du point de vue de l'analyticité, la notion de langage artificiel muni de règles sémantiques est *un feu follet par excellence*. Les règles sémantiques déterminant les énoncés analytiques d'un langage artificiel n'ont d'intérêt que dans la mesure où nous comprenons au préalable la notion d'analyticité. Elles ne nous aident nullement à acquérir une telle compréhension.[15]

Enfin, en supposant raisonnablement que la vérité d'un énoncé dépend à la fois d'une composante linguistique et d'une composante factuelle (un énoncé étant vrai si et seulement si sa signification linguistique globale s'accorde avec le fait auquel il fait référence), Quine conclut :

> Etant donné cette supposition, il devient alors raisonnable de penser que, dans certains énoncés, la composante factuelle puisse être nulle : ce serait les énoncés analytiques. Mais aussi raisonnable que paraisse *a priori* cette hypothèse, on n'a toujours pas réussi à tracer une frontière entre les énoncés analytiques et synthétiques. Croire qu'une telle distinction peut-être tracée est un dogme non empirique des empiristes, un acte de foi métaphysique.[16]

[14][Quine, 1951] désormais cité à partir de [Quine, 2003], p. 62
[15][Quine, 2003], p. 69
[16]ibid., p. 70

Quine entend être un empiriste conséquent et épouser “un pragmatisme plus profond” que celui de son maître Carnap, lorsque dans [Quine, 1951] il rejette vigoureusement la distinction de l'analytique et du synthétique : le caractère analytique ou synthétique de l'énoncé “tous les célibataires sont non mariés” n'est pas plus évident que celui d'un axiome spécifiquement mathématique de la théorie des ensembles, comme l'axiome de l'infini par exemple. Mais Quine ce n'est pas la distinction elle-même que Quine rejette, mais l'idée que l'on puisse définir un critère qui permettent de distinguer de manière certaine un énoncé analytique comme (5) d'autres énoncés considérés comme synthétiques. Je vais montrer pour conclure comment cette thèse s'accorde avec les leçons que l'on peut tirer des théorèmes de Gödel au sujet de l'analyticité.

5 Conclusion : Relativité de l'analyticité

Dans [Parsons, 1995], Parsons expose les différences de vue entre Gödel et Quine sur la question de l'analyticité et remarque que, du vivant de Gödel,[Gödel, 1944] est l'unique article publié où la question de l'analycité des mathématiques,[17] est abordée. On trouve des remarques sur le même sujet dans la Conférence Gibbs donnée en 1951 à la Société Américaine de mathématique, [Gödel, 1994], mais Gödel ne publia jamais cette conférence. Parsons souligne que Gödel accorde deux sens au concept d'analyticité. Celui-ci, au sens étroit, concerne la définition des termes qui doit être faite de telle façon que “les axiomes et les théorèmes deviennent des cas spéciaux de la loi d'identité et les propositions réfutables deviennent des négations de cette loi.” Si les définitions (explicites ou contextuelles), précise Parson en citant Gödel, “permettent de supprimer le terme défini en un nombre fini d'étapes à chaque fois”, alors l'analycité en ce sens implique l'existence d'une procédure de décision et ne peut être obtenue.[18]. Gödel a donc parfaitement vu, comme l'atteste une republication de [Gödel, 1944], que l'arithmétique est démonstrativement non-analytique au sens que Kant donne à ce mot, en raison du théorème d'incomplétude.[19]

Mais il est plus intéressant maintenant de remarquer, qu'en un sens cette fois plus large du terme “analytique”, Gödel accorde aux mathématiques le caractère d'analyticité. Pour reprendre de la manière la plus concise possible le compte rendu de Parsons qui s'appuie cette fois sur [Gödel, 1994], on peut dire que Gödel conteste la thèse de [Carnap, 1937] selon laquelle les mathématiques ne sont qu'une syntaxe du langage, “sans contenu ni objet”, mais leur accorde cependant l'analyticité. Cette acception de l'analyticité en un sens second et plus large n'a

[17]Plus précisément la question de l'analyticité des axiomes des *Principia Mathematica*

[18][Parsons, 1995], p. 299

[19][Parsons, 1995], p.300, p.311, n.17

pas un sens limpide. Deux citations de Gödel l'éclairent et je vais les donner en inversant l'ordre choisi par Parsons. Voici la première :

> Il suit notamment des métathéorèmes mentionnés [les théorèmes d'incomplétude] qu'une preuve du caractère tautologique [...] des axiomes mathématiques est en même temps une preuve de leur cohérence, et qu'elle ne peut être faite à l'aide d'aucune procédure de preuve *plus faible* contenue dans les axiomes eux-mêmes.[20]

L'usage du terme "tautologique" dans la citation qui précède risque d'introduire une confusion. Il faut comprendre que si un axiome ou si un énoncé spécifiquement mathématique est dit "tautologique", il ne peut l'être de manière isolée, abstraction faite de sa signification et de ce qu'il permet de prouver. On est tenté de dire, bien que ce soit malaisé, que ce n'est pas une tautologie comparable à une formule valide du calcul propositionnel, comme

$$\models (p \vee \neg p) \tag{9}$$

Il est clair que (9) est une formule valide indépendamment de ce qui est asserté par un énoncé quelconque représenté par la variable propositionnelle p. Le caractère "tautologique" des axiomes auquel fait allusion Gödel est la validité que transmet la règle D du détachement :

$$\frac{\begin{array}{l}\models X \rightarrow Y\\ \models X\end{array}}{\models Y}$$

Or on peut formuler le théorème d'incomplétude de la façon suivante " PA est ou bien incomplet ou bien incohérent". Si l'on assume que PA est un système correct (*sound*) ce qui signifie que tout énoncé démontrable dans PA est vrai, le théorème d'incomplétude permet d'assumer les énoncés valides qui suivent ainsi que la conclusion *via* l'application de la règle D :

$$\frac{\begin{array}{l}\models \neg(\text{Incomplétude de PA} \leftrightarrow \text{Incohérence de PA})\\ \models \text{Cohérence de PA}\end{array}}{\models \text{Incomplétude de PA}}$$

Comme on le voit dans la règle D ainsi que dans son application qui permet de conclure à l'incomplétude de PA, le détachement dépend précisément de la signification accordée à X et à Y lorsque l'on affirme la validité des prémisses. En revanche la validité de " $p \vee \neg p$" ne dépend pas de la signification de p mais uniquement de celle des constantes logiques. Il est donc clair que si l'on peut

[20] [Gödel, 1994], p.27, cité par [Parsons, 1995], p. 302

considérer que la démonstration de l'incomplétude de PA est une vérité analytique, l'analyticité de celle-ci est d'un autre ordre que celle d'une tautologie de la logique élémentaire.

Il ne faut en effet pas perdre de vue que l'assertion de la cohérence de PA relève de la métathéorie, comme l'indique l'usage du signe de la validité dans l'expression "$\models$ Cohérence de PA". C'est donc parce que les axiomes de PA sont considérés comme vrais et que l'on accepte leur cohérence qu'il est possible de reconnaître la vérité d'un énoncé G que PA ne peut pas prouver. Ce point remarquable a suscité une difficile et profonde littérature logico-philosophique que je ne peux ici que faire allusion,[21] et qui a déjà été anticipée par [Gödel, 1994] où Gödel critique le théorème 34i21 de [Carnap, 1937] où Carnap démontre que tout énoncé démontrable du Langage II (le métalangage du langage I) est analytique (alors que la converse n'est pas vraie) :

> Cependant (et c'est là où cette théorie trébuche) dans cette dérivation les concepts mathématiques et logiques ainsi que les axiomes eux-mêmes doivent être appliqués de manière spécifique, notamment comme faisant référence aux symboles, aux combinaisons de symboles, aux ensembles de telles combinaisons, etc. Donc cette théorie, si elle veut prouver le caractère tautologique des axiomes mathématiques, doit auparavant assumer la vérité de ces axiomes. Ainsi, alors que l'idée première de ce point de vue était de faire en sorte de rendre la vérité des axiomes mathématiques compréhensible en montrant qu'ils sont des tautologies, il est contraint de conclure précisément l'opposé, c'est-à-dire que la vérité des axiomes doit *d'abord* être assumé, et *ensuite* on peut montrer que, dans une langue convenablement choisie, ils sont des tautologies.

C'est cette idée du caractère substantiel de la vérité des axiomes que soutiendront, après Gödel, des logiciens comme Shapiro et Ketland.[22] Mais n'allons pas plus loin et résumons maintenant les thèses assumées par Gödel au sujet de la nature des mathématiques et de la question de l'analyticité :

1. En raison du théorème d'incomplétude les mathématiques ne sont pas analytiques au sens kantien et restreint du terme.
2. Les mathématiques ont un contenu conceptuel et ne sont pas qu'une syntaxe logique du langage contrairement à ce qu'affirme [Carnap, 1937].
3. Les mathématiques ayant un contenu conceptuel, elles sont analytiques en un sens plus large que le sens kantien.

[21] Voir par exemple [Feferman, 1991], [Shapiro, 1998], [Field, 1999], [Ketland, 1999], [Tennant, 2002]

[22] Voir les références bibliographiques précédentes

Dans sa réponse à Parsons, Quine se dit en accord avec Gödel avec les deux premières thèses, mais persiste à refuser l'analycité aux mathématiques, qui sont plus proches selon lui des sciences de la nature. Il s'accorde avec Gödel et contre Carnap sur la reconnaissance d'un contenu aux mathématiques, qui est un contenu ontologique, avec des objets spécifiques, à la différence de la logique entendue en un sens étroit, comme on doit l'entendre, qui ne véhicule aucune notion d'objet déterminée.[23] La réponse de Quine est fondée sur le maintien d'un sens étroit du terme "analytique" et sur la distinction entre la logique du premier ordre et les mathématiques (auxquelles il rattache ce que l'on appelle "la logique d'ordre supérieur" qu'il considère comme une théorie des ensembles). Son refus de l'analyticité des mathématiques est donc fondé sur le fait que la logique d'ordre supérieur (incomplète comme la théorie des ensembles) est fondamentalement distincte de la logique du premier ordre, et de ce point de vue, la position de Quine est inattaquable.

Remarquons enfin que Quine s'abstient d'affirmer clairement que la mathématique est synthétique, même si on serait tenté de le faire lorsqu'il la rapproche des sciences de la nature. C'est à tort que l'on franchirait le pas, car son argument ne vise à rien d'autre que montrer qu'au-delà de l'étroit domaine de la logique du premier ordre, dès lors que l'on fait intervenir autre chose que la signification des constantes logiques, la distinction de l'analytique et du synthétique n'atout simplement aucun frontière précise et définitive.[24] En effet la vérité de l'énoncé de Gödel, indécidable dans le langage de PA, ne peut-être déduite qu'à partir d'une extension non conservative de PA, elle requiert donc une synthèse, si synthèse il y a dès qu'il y a contenu mathématique. L'induction mathématique offre un tel contenu. Gödel pense alors que le fait de reconnaître aux axiomes mathématiques un contenu conceptuel et de les admettre comme "vrais", permet de les faire apparaître comme des tautologies à un niveau métathéorique et donc de les considérer comme analytiques en un sens élargi : G n'est pas analytique dans PA, mais il le devient dans $(PA \cup TS)$ où il est prouvé. C'est ce que j'appelle, en m'inspirant de Quine, "la relativité de l'analyticité".[25]

Cependant considérer les axiomes de l'arithmétique comme analytiques en vertu de leur signification entraîne alors les mêmes objections que Quine soulève dans [Quine, 1951] au sujet de la prétendu analyticité de l'énoncé "aucun célibataire n'est marié". Si l'analyticité est entendue au sens de "conventionalité", alors, comme Quine le souligne dans [Quine, 1976], rien de spécifiquement mathématique n'est éclairé par la définition de l'analytique ou du démontrable que Carnap donne dans [Carnap, 1937] pour le Langage II, car cette façon de carac-

[23][Leonardi, 1995], p. 352

[24][Quine, 1992], § 22 confirme ce point et éclaire la signification philosophique.

[25]Tennant dans [Tennant, 1997]pp. 294-295, parle d' "analyticité directe" et d' "analyticité indirecte".

tériser le “logico-mathématique” pourrait tout aussi bien être élargie, sans rien changer, de façon à inclure la physique, l’économie, “et n’importe quoi d’autre sous le soleil”.[26] L’argument signifie qu’aux concepts d’incomplétude et d’incohérence tels qu’ils sont utilisés avec la règle du détachement, on peut substituer des concepts que l’on emprunte à des théories physiques, économiques ou juridiques et qui s’excluent mutuellement, et l’on parviendra également à une conclusion valide. Comme l’explique avec concision Dubucs en faisant également référence à [Quine, 1976], Carnap ne semble pas avoir vu que le critère de spécifiabilité syntaxique est un critère nécéssaire mais non suffisant de conventionnalité : une classe finie quelconque de vérités peut toujours être syntaxiquement spécifiée.[27]

Je terminerai sur un énoncé conditionnel prudent : compte tenu des théorèmes de Gödel et si les arguments développés dans [Quine, 1951] sont corrects, alors il n’y a qu’une seule distinction exacte et définitive, dans le domaine des mathématiques, entre ce qui est analytique et ce qui ne l’est pas : celle-ci n’exprime rien d’autre que la frontière qui distingue la logique du premier ordre du reste des mathématiques. Les tentatives pour donner un autre sens à cette distinction que celle qui est conforme à l’esprit de la définition kantienne appartiennent donc aux querelles philosophiques.[28]

Références

[Carnap, 1937] Carnap, R. (1937). *The Logical Syntax of Language*. Routledge and Kegan, London.

[Carnap, 1997] Carnap, R. (1997). *Signification et nécessité*. Gallimard. trad. Rivenc & de Rouilhan.

[Couturat, 1904] Couturat, L. (1904). La philosophie des mathématiques de kant. *Revue de Métaphysique et de morale*. Réimprimé en Appendice de Couturat, 1980.

[Couturat, 1980] Couturat, L. (1980). *Les principes des mathématiques, avec un Appendice sur la philosophie des mathématiques de Kant*, pages 235–308. Blanchard, Paris.

[Dubucs, 1991] Dubucs, J. (1991). La philosophie de kurt gödel. *L’âge de la science*, pages 53–68.

[26] [Quine, 1976], p. 125

[27] [Dubucs, 1991], p. 57, n.9

[28] Pour un aperçu synthétique des modifications contemporaines de la frontière entre analytique et synthétique, voir [Tennant, 1997], Chap. 9 : Analyticity and Syntheticity, pp. 281-304

[Feferman, 1991] Feferman, S. (1991). Reflecting on incompleteness. *Journal of Symbolic Logic*, 56 :1–49.

[Field, 1999] Field, H. (1999). Deflating the conservativeness argument. *Journal of Philosophy*, pages 533–540.

[Gödel, 1930] Gödel, K. (1930). Die Vollstandigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte fur Mathematk und Physik*, 37 :349–360.

[Gödel, 1931] Gödel, K. (1931). Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 :pp. 173–198. trad. fr. in Nagel et al. editors, 1989.

[Gödel, 1944] Gödel, K. (1944). Russell's mathematical logic. In Schlipp, P., editor, *The Philosophy of Bertrand Russell*, pages 125–153, Evanston. Northwestern University.

[Gödel, 1994] Gödel, K. (1994). Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications. In et al., F., editor, *Collected Works*, volume III : Unpublished Essays and Lectures. Oxford University Press, New York.

[Kant, 1976] Kant, E. (1781, trad. fr. Barni, 1976). *Critique de la Raison Pure*. Garnier-Flammarion.

[Ketland, 1999] Ketland, J. (1999). Deflationism and tarski's paradise. *Mind*, 108(429) :69–94.

[Lambert, 1997] Lambert, K. (1997). *Free Logics, Their Foundations, Character, and Some Applications Thereof*, volume 1 of *ProPhil - Projekte zur Philosophie*. Academia Verlag, Sankt Augustin.

[Leonardi, 1995] Leonardi, P. & Santambrogio, M., editor (1995). *On Quine, New Essays*, Cambridge, New York, USA. Cambridge University Press.

[Nagel E., 1989] Nagel E., e. a., editor (1989). *Le théorème de Gödel*, Paris. Seuil.

[Parsons, 1995] Parsons, C. (1995). Quine and Gödel on Analyticity. In Leonardi, P., S. M., editor, *On Quine, New Essays*, pages 297–313, Cambridge, New York, USA. Cambridge University Press.

[Poincaré, 1902] Poincaré, H. (1902). *La science et l'hypothèse*. Flammarion, Paris. réimp. en 1968, collection Champs-Flammarion, avec une Préface de Vuillemin, J.

[Quine, 1951] Quine, W. (1951). Two Dogmas of Empiricism. *The Philosophical Review*, 60 :20–43. reimprimé dans *From a Logical Point of View*, 1953, H.U.P., trad.fr. Vrin 2003.

[Quine, 1976] Quine, W. (1966, 1976). Carnap and logical truth. In *The Ways of Paradox and other essays*, pages 107–132, Cambridge, Mass. & London, England. Harvard University Press.

[Quine, 1970] Quine, W. (1970). *Philosophy of Logic*. Prentice Hall, Englewood Cliffs. trad. fr. Largeault, Aubier-Montaigne, Paris, 1975.

[Quine, 1992] Quine, W. (1992). *Pursuit of Truth*. Harvard University Press, Cambridge, Mass.

[Quine, 2003] Quine, W. (2003). *Du point de vue logique*, chapter II, Deux dogmes de l'empirisme, pages 49–81. Vrin.

[Shapiro, 1998] Shapiro, S. (1998). Proof and Truth : Through Thick and Thin. *Journal of Philosophy*, (95) :493–521.

[Tennant, 1997] Tennant, N. (1997). *The Taming of the True*. Oxford University Press, Oxford, New York.

[Tennant, 2002] Tennant, N. (2002). Deflationism and the gödel phenomena. *Mind*, 111 :551–582.